Exercices Proposés.

1) Dans $\mathbb{R}^4$ avec sa base canonique $\{e_1, .., e_4\}$ et sa base duale $\{\varepsilon_1, .., \varepsilon_4\}$, considérer

$$\alpha = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4 .$$

et l'application $h : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4) .$$

Vérifier que h préserve le volume sans être symplectique.

2) Montrer que tout espace vectoriel symplectique (E, α) contient un sous-espace lagrangien.

3) Soit L un sous-espace lagrangien de (E, α). Considérer l'application $\sigma : L \longmapsto (E/L)^*$ définie par $\sigma(x)[y+L] = \alpha(x, y)$ pour $x \in L$ et $y + L \in E/L$ (l'espace quotient). Calculer $\mathrm{Ker}(\sigma)$. En déduire qu'il s'agit d'un isomorphisme.

4). Soit M une variété différentiable et soit $\varphi : M \mapsto M$ un difféomorphisme. Montrer qu'alors $\varphi^* : T^*M \mapsto T^*M$ est un difféomorphisme symplectique pour la structure canonique.

5) Assurez-vous que si (M, ω) est une variété symplectique alors

$\{ \varphi : M \mapsto M,\ \varphi$ difféomorphisme symplectique $\}$.

est un groupe.

6) Soit (M, ω) et (N, ρ) sont symplectiques et soit $F : M \mapsto N$ est une application C^∞.

Supposons que $\varphi : M \mapsto M'$ et $\psi : N \mapsto N'$ sont des difféomorphismes. Montrer que F est symplectique ssi $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ est une application symplectique de $(M', \varphi^* \omega)$ dans $(N', \psi^* \rho)$. En particulier F est symplectique ssi les représentations locales de F (i.e. dans des cartes) sont symplectiques.

7). Soient (M, ω) et (N, ρ) deux variétés symplectiques et $f : M \mapsto N$ une application symplectique. On suppose que $\dim M = \dim N = 2n$. Alors $\forall x \in M$, il existe une carte symplectique (U, φ) autour de x et une autre (V, ψ) autour de $F(x)$ telles que $f(U) = V$, $\varphi(U) = \psi(V)$ et la représentation locale de f se réduise à l'identité.

8). Soit (M, ω) symplectique. Montrer que si α et β sont deux 1-formes fermées sur M, alors leur crochet de Poisson est donné par.

$$(\alpha, \beta) = -d(\omega(X_\alpha, X_\beta))$$

où X_α est le champ de vecteurs sur M tel que $\alpha = i_{X_\alpha}\omega$, etc...