Introduction à la géométrie de Poisson

Mohamed Boucetta
m.boucetta@uca.ac.ma

University Cadi-Ayyad
Marrakech Morocco

Ecole CIMPA:Structure symplectiques en mathématiques, physique et applications au contrôle
Faculté des sciences Ben-Msik
Casablanca
1-12 Juin 2021

Plan

1. Quelques rappels en géométrie différentielle ;
2. Définition d'une variété de Poisson ;
3. Théorème de Darboux-Weinstein et feuilletage symplectique ;
4. Algébroides de Poisson
5. Unimodularité des structures de Poisson
6. Structures de Poisson linéaires ;
7. Structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie ;
8. Variétés de Riemman-Poisson

Rappels

Soit M une variété lisse de dimension d. On adoptera les notations suivantes :
1. $C^\infty(M)$ désignera l'algèbre commutative des fonctions C^∞ à valeurs réels sur M.
2. $\mathcal{X}^1(M)$ l'espace des champs de vecteur sur M, c'est-à-dire les sections C^∞ du fibré tangent $p_M : TM \longrightarrow M$. Plus généralement, on notera, pour tout entier $2 \leq q \leq d$, $\mathcal{X}^q(M)$ l'espace des champs de multivecteur de degré q, c'est-à-dire, les sections C^∞ du fibré vectoriel $p_M : \wedge^q TM \longrightarrow M$.

Dans un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$, un champ de multivecteur $Q \in \mathcal{X}^q(M)$ s'écrit

$$Q = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq d} Q_{j_1 \ldots j_q} \partial_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_q}.$$

On pose $\mathcal{X}(M) = C^\infty(M) \oplus \mathcal{X}^1(M) \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}^d(M)$.

3. Pour tout entier $1 \leq q \leq d$, $\Omega^q(M)$ désignera l'espace des q-formes différentielles sur M. Dans un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$, une forme différentielle $\alpha \in \Omega^q(M)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq d} \alpha_{j_1 \ldots j_q} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

et sa différentielle

$$d\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq d} d\alpha_{j_1 \ldots j_q} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

On pose $\Omega(M) = C^\infty(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \ldots \oplus \Omega^d(M)$.

Notons les identifications suivantes qui sont très utiles.

1. Pour tout $1 \leq q \leq d$, $\mathcal{X}^q(M)$ s'identifie à l'espace des applications

$$\overbrace{\Omega^1(M) \times \ldots \times \Omega^1(M)}^{q} \longrightarrow C^\infty(M)$$

qui sont $C^\infty(M)$-multilinéaires alternées.

2. Pour tout $1 \leq q \leq d$, $\Omega^q(M)$ s'identifie à l'espace des applications

$$\overbrace{\mathcal{X}^1(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^1(M)}^{q} \longrightarrow C^\infty(M)$$

qui sont $C^\infty(M)$-multilinéaires alternées.

Pour tout $Q \in \mathcal{X}^q(M)$ et tout $X \in \mathcal{X}^1(M)$, la dérivée Lie de Q dans la direction X, noté usuellement $L_X Q$ sera noté $[X, Q]$. Pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \Omega^1(M)$,

$$\begin{aligned} [X, Q](\alpha_1, \ldots, \alpha_q) &= X.Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{q} Q(\alpha_1, \ldots, L_X \alpha_j, \ldots, \alpha_q). \end{aligned}$$

De même, si $\alpha \in \Omega^q(M)$, la dérivée de Lie de α dans la direction de X est donnée, pour tout $X_1, \ldots, X_q \in \mathcal{X}^1(M)$, par

$$\begin{aligned} L_X \alpha(X_1, \ldots, X_q) &= X.\alpha(X_1, \ldots, X_q) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{q} \alpha(X_1, \ldots, [X, X_j], \ldots, X_q). \end{aligned}$$

La différentielle d s'exprime à l'aide du crochet de Lie, c'est ainsi que pour tout $X_1, \ldots, X_{q+1} \in \mathcal{X}^1(M)$

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \ldots, X_{q+1}) &= \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j-1} X_j.\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{q+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq d} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_q \end{aligned}$$

Noter que si $f \in C^\infty(M)$ considérée comme un champ de multivecteur de degré 0 ou comme une forme différentielle de degré 0, on a

$$[X, f] = L_X f = df(X).$$

Pour tout entier $2 \leq q \leq d$, un **crochet de Leibniz d'ordre q ou multi-dérivation** sur M est une application

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{C^\infty(M) \times \ldots \times C^\infty(M)}^{q} & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (f_1, \ldots, f_q) & \mapsto & \{f_1, \ldots, f_q\}, \end{array}$$

telle que

1. $\{\ \}$ est $\mathbb{R}$-multilinéaire alternée ;
2. $\{\ \}$ vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire, pour tout $f, g, f_2, \ldots, f_q \in C^\infty(M)$,

$$\{fg, f_2, \ldots, f_q\} = f\{g, f_2, \ldots, f_q\} + g\{f, f_2, \ldots, f_q\}.$$

On notera $\mathcal{D}^q(M)$ l'espace des crochets de Leibniz d'ordre q sur M.

Proposition.

Pour tout $1 \leq q \leq d$, l'application qui à un champ de multivecteur Q associe le crochet de Leibniz d'ordre q $\{\ \}$ défini par

$$\{f_1, \ldots, f_q\} = Q(df_1, \ldots, df_q),$$

pour tout $f_1, \ldots, f_q \in C^\infty(M)$, réalise une bijection entre $\mathcal{X}^q(M)$ et $\mathcal{D}^q(M)$.

Les crochets d'ordre 2 vérifient une propriété remarquable. En effet, pour tout crochet de Leibniz d'ordre 2, on définit le **Jacobiateur** de $\{\ ,\ \}$ comme étant l'application

$$J : C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

par

$$J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}.$$

Proposition.

Le Jacobiateur est un crochet de Leibniz d'ordre 3.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
J(f_1f_2,g,h) &= \{f_1f_2,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f_1f_2\}\}+\{h,\{f_1f_2,g\}\}\\
&= f_1\{f_2,\{g,h\}\}+f_2\{f_1,\{g,h\}\}+\{g,f_1\{h,f_2\}\}\\
&\quad +\{g,f_2\{h,f_1\}\}+\{h,f_1\{f_2,g\}\}+\{h,f_2\{f_1,g\}\}\\
&= f_1\{f_2,\{g,h\}\}+f_2\{f_1,\{g,h\}\}+\{g,f_1\}\{h,f_2\}\\
&\quad +f_1\{g,\{h,f_2\}\}+\{g,f_2\}\{h,f_1\}+f_2\{g,\{h,f_1\}\}\\
&\quad +\{h,f_1\}\{f_2,g\}+f_1\{h,\{f_2,g\}\}\\
&\quad +\{h,f_2\}\{f_1,g\}+f_2\{h,\{f_1,g\}\}\\
&= f_1J(f_2,g,h)+f_2J(f_1,g,h).
\end{aligned}$$

□

Noter que si X et Y sont deux champs de vecteurs

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{1}$$

et que les opérateurs L_X, L_Y vérifient

$$L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X.$$

Cette formule appliquée pour $Q \in \mathcal{X}^q(M)$ donne

$$[[X, Y], Q] = [X, [Y, Q]] - [Y, [X, Q]]. \tag{2}$$

Théorème.

(Schouten-Nijenhuis) *Il existe sur $\mathcal{X}(M)$ un crochet $[\ ,\ ]$ appelé crochet de Schouten-Nijenhuis vérifiant :*

1. $[A, B] \in \mathcal{X}^{a+b-1}$.
2. $[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B, A]$.
3. $[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C]$, *et* $[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b}[A, C] \wedge B$.
4. $$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)}[C, [A, B]] = 0. \tag{3}$$
5. *Si* $X \in \mathcal{X}^a(M)$, $A \in \mathcal{X}^a(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$, *alors*
$$[X, A] = L_X A, \ [X, f] = X(f).$$

Soit $\{\ ,\ \}$ un crochet de Leibniz d'ordre 2 et soit J son Jacobiateur. Soient $A \in \mathcal{X}^2(M)$ et $A_J \in \mathcal{X}^3(M)$ définis par

$$\{f, g\} = A(df, dg) \quad \text{et} \quad J(f, g, h) = A_J(df, dg, dh).$$

Proposition.

On a $A_J = \frac{1}{2}[A, A]$. *En plus si* $A = \sum_{i<j} A_{ij}\partial_i \wedge \partial_j$

$$\begin{aligned} A_J &= 2 \sum_{m<n<p} A_{mnp}\partial_m \wedge \partial_n \wedge \partial_p, \\ A_{mnp} &= \sum_j \left(A_{mj}\partial_j A_{np} + A_{nj}\partial_j A_{pm} + A_{pj}\partial_j A_{mn}\right). \end{aligned}$$

Preuve :

Preuve.

Choisissons un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ et écrivons

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} \partial_i \wedge \partial_j,$$

avec $2A_{ij} = \{x_i, x_j\}$ et calculons $[A, A]$. On a

$$[A, A] = \sum_{i,j} \sum_{l,k} \left[A_{ij} \partial_i \wedge \partial_j, A_{lk} \partial_l \wedge \partial_k\right].$$

Un calcul direct utilisant le fait que $[A_{ij}, A_{lk}] = 0$, que $[\partial_i \wedge \partial_j, \partial_l \wedge \partial_k] = 0$ et les relations (9) et (10) donne

$$[A, A] = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

avec

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{i,j} \sum_{l,k} A_{ij} \partial_j A_{lk} \partial_i \wedge \partial_l \wedge \partial_k, \\
Q_2 &= -\sum_{i,j} \sum_{l,k} A_{ij} \partial_i A_{lk} \partial_j \wedge \partial_l \wedge \partial_k, \\
Q_3 &= \sum_{i,j} \sum_{l,k} A_{lk} \partial_k A_{ij} \partial_l \wedge \partial_i \wedge \partial_j, \\
Q_4 &= -\sum_{i,j} \sum_{l,k} A_{lk} \partial_l A_{ij} \partial_k \wedge \partial_i \wedge \partial_j.
\end{aligned}$$

Il s'avère que $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$ et donc

$$[A, A](dx_m, dx_n, dx_p) = 8 \sum_j \left(A_{mj} \partial_j A_{np} + A_{nj} \partial_j A_{pm} + A_{pj} \partial_j A_{mn} \right). \tag{4}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}\{x_m, \{x_n, x_p\}\} &= A(dx_m, d\{x_n, x_p\}) = 2A(dx_m, dA_{np}) \\ &= 2\sum_{i,j} A_{ij}\partial_i \wedge \partial_j(dx_m, dA_{np}) \\ &= 4\sum_{j} A_{mj}\partial_j A_{np}.\end{aligned}$$

Puisque $A_J(dx_m, dx_n, dx_p) = J(x_m, x_n, x_p)$, on déduit que

$$[A, A](dx_m, dx_n, dx_p) = 2A_J(dx_m, dx_n, dx_p),$$

ce qui établit la formule souhaitée.

Exercice.

Pour tout champ de multivecteur Q sur une variété M, on notera $\{\ ,\}_Q$ le crochet de Leibniz associé.

Exprimer $\{\ ,\}_{[Q_1,Q_2]}$ en fonction de $\{\ ,\}_{Q_1}$ et $\{\ ,\}_{Q_2}$.

Définition d'une structure de Poisson et premières propriétés

Définition.

Une structure de Poisson sur une variété lisse M est la donnée d'un crochet de Leibniz d'ordre 2 sur M dont le Jacobiateur est nul, c'est-à-dire, la donnée de

$$\begin{array}{rccc} \{\ ,\ \}: & C^\infty(M)\times C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (f,g) & \mapsto & \{f,g\} \end{array}$$

tel que

1. $\{\ ,\ \}$ *est $\mathbb{R}$-bilinéaire alterné ;*
2. $\{\ ,\ \}$ *vérifie la règle de Leibniz*

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}, \quad f,g,h\in C^\infty(M);$$

3. $\{\ ,\ \}$ *vérifie l'identité de Jacobi*

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} = 0, \quad f,g,h\in C^\infty(M).$$

Théorème.

La donnée d'une structure de Poisson sur une variété lisse M est équivalente à la donnée d'un champ de bivecteur $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ tel que

$$[\pi, \pi] = 0.$$

Un tel champ de bivecteur est dit de Poisson.

Proposition.

Un champ de bivecteur exprimé dans un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ *par*

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \partial_i \wedge \partial_j,$$

où $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\} = \pi(dx_i, dx_j)$, *est de Poisson si et seulement si*

$$\sum_{j=1}^{d} (\pi_{mj} \partial_j \pi_{np} + \pi_{nj} \partial_j \pi_{pn} + \pi_{pj} \partial_j \pi_{mn}) = 0 \tag{5}$$

pour tout $1 \leq m < n < p \leq d$.

Exemple.

1. *Soit* $((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice anti-symétrique à coefficients réels. Alors le champ de bivecteur sur* $\mathbb{R}^n$ *donné par*
$$\pi=\sum_{i,j}a_{ij}\partial_i\wedge\partial_j$$
est de Poisson en vertu de (9).
2. *Soit* $X_1,\ldots,X_n$ *une famille de champs de vecteur sur une variété* M *qui commute deux à deux et soit* $((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice anti-symétrique à coefficients réels. Alors le champ de bivecteur sur* M *donné par*
$$\pi=\sum_{i,j}a_{ij}X_i\wedge X_j$$
est de Poisson.

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $(x_1, \ldots, x_d)$ un système de coordonnées et

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \partial_i \wedge \partial_j.$$

Le **crochet de Poisson** de deux fonctions f et g est donné par

$$\{f, g\} = \pi(df, dg)$$

soit, localement

$$\{f, g\} = \sum_{i<j} \pi_{ij} \left(\partial_i f \partial_j g - \partial_i g \partial_j f \right). \tag{6}$$

Le champ de vecteur X_f défini par

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

est appelé **champ hamiltonien** associé à f et, localement, X_f s'écrit

$$X_f = \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} \pi_{ij} \partial_i f \right) \partial_j. \tag{7}$$

On a aussi

$$X_f = -[\pi, f] = -[f, \pi]. \tag{8}$$

Le champ de bivecteur π définit un morphisme fibré, appelé **application d'ancrage**,

$$\pi_\# : T^*M \longrightarrow TM$$

par

$$\beta(\pi_\#(\alpha)) = -\alpha(\pi_\#(\beta)) = \pi(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in T^*M.$$

Noter que $X_f = \pi_\#(df)$. On a, pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$\pi_\#(dx_i) = \sum_{j=1}^{d} \pi_{ij}\partial_j. \tag{9}$$

Le rang de l'application linéaire $\pi_{\#}(p) : T_p^*M \longrightarrow T_pM$ est appelé **rang de** π au point $p \in M$.
En vertu de (13), c'est le rang de la matrice anti-symétrique

$$(\pi_{ij}(p))_{1 \leq i \leq j \leq d}$$

et il est donc pair.
L'ensemble des points de M où le rang est localement constant est un ouvert dense de M, appelé **ouvert régulier**, et noté M^{reg}. Un point de M^{reg} est dit **régulier** alors qu'un point dans $M \setminus M^{reg}$ est dit **singulier**

$\phi : (M_1, \{\ ,\ \}_1) \longrightarrow (M_2, \{\ ,\ \}_2)$ est un **morphisme de Poisson** si $\phi^* : C^\infty(M_2) \longrightarrow C^\infty(M_1)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire,

$$\{\phi^* f, \phi^* g\}_1 = \phi^*\{f, g\}_2 \qquad \forall f, g \in C^\infty(M_2).$$

En notant, π_1 et π_2 les champs de bivecteur associés, respectivement, à $\{\ ,\ \}_1$ et $\{\ ,\ \}_2$, on a

$$(\phi_* \pi_1) = \pi_2 \circ \phi.$$

Un champ de vecteurs X sur une variété de Poisson (M, π) est dit **champ de Poisson** si son flot préserve π, c'est-à-dire,

$$[X, \pi] = 0.$$

Proposition.

Soit (M, π) une variété de Poisson. Alors :

1. *Tout champ de vecteurs hamiltonien est un champ de Poisson.*
2. *Pour tout couple de fonctions f, g et tout champ de Poisson Y, on a*

$$\begin{aligned} [X_f, X_g] &= X_{\{f,g\}}, & (10)\\ [Y, X_f] &= X_{Y(f)}. & (11) \end{aligned}$$

Soit M une surface et soit π un champ de bivecteur sur M. Le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\pi, \pi]$ qui est un champ de multivecteur d'ordre 3 est identiquement nul. Ainsi tout champ de bivecteur π sur M définit une structure de Poisson. Localement π s'écrit

$$\pi = \pi_{12} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Soit p un point dans le domaine de (x, y).

On a alors trois cas. • Le rang de π en p est 2 et p est nécessairement régulier. On peut alors prendre π_{ij} non nul partout. En posant

$$q = x \quad \text{et} \quad p(x, y) = \int_0^y \frac{1}{\pi_{12}(u, v)} dv,$$

on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{1}{\pi_{12}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi_{12}} \neq 0$$

et donc (q, p) est un système de coordonnées. D'un autre côté, d'après (16)

$$\{q, p\} = \pi_{12} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 1.$$

Donc dans le nouveau système de coordonnées (p, q), π s'écrit

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p}.$$

• Le rang de π en p est nul et π est un point régulier. Dans ce cas π est nul au voisinage de p.

• Le rang de π en p est nul et π est un point singulier. Dans ce cas, au voisinage de p,

$$\pi = \pi_{12} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

avec π_{12} une fonction non nulle et $\pi_{12}(p) = 0$.
En écrivant le développement de Taylor de π_{12} au voisinage de p, on obtient

$$\pi_{12}(x, y) = ax + by + R(x, y)$$

avec $a = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x}(p)$ et $b = \frac{\partial}{\partial y}(p)$. Ainsi $\pi = \pi_1 + R$ avec π_1 linéaire. On peut alors se poser le problème de la linéaraisation de π, c'est-à-dire, existe t-il un système de coordonées (u, v) tel que

$$\pi = (\alpha u + \beta v) \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v},$$

où α et β sont des constantes réels ?

La réponse à cette question est oui si $d_p\pi_{12} \neq 0$. En effet, supposons, par exemple, que $\frac{\partial \pi_{12}}{\partial x}(p) \neq 0$ et posons $f = \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x}$. Cette fonction ne s'annule pas sur un voisinage de p. Dans un premier temps, on pose $u_1 = \pi_{12}$ et $v_1 = y$ et on obtient un système de coordonnées avec $\{u_1, v_1\} = \pi_{12} f$. Ainsi, dans (u_1, v_1), π s'écrit

$$\pi = u_1 f \frac{\partial}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Dans un deuxième temps, on pose $u = u_1$ et $v = \int \frac{1}{f} dv_1$ et on obtient un nouveau système de coordonnées et $\{u, v\} = u_1 = u$ et ainsi, dans (u, v),

$$\pi = u \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}.$$

Exemple.

Soit f une fonction lisse sur $\mathbb{R}^3$. On définit le champ de bivecteur π_f par

$$\pi_f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Exercice.

Montrer que

$$\{g, h\} = \det(dg, dh, df)$$

et en dédire que $X_f = 0$.

Exercice.

Montrer que le champ de bivecteur $\partial_x \wedge (\partial_y + x\partial_z)$ *sur* $\mathbb{R}^3$ *n'est pas de Poisson.*

Exercice.

Reprendre le tensor de Poisson défini dans l'exemple 2.2 avec $f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. *Montrer qu'il existe un système de coordonnées* (u, v, w) *au voisinage de* $(0, 0, 0)$ *tel que*

$$\{u, v\} = a_1 u + b_1 v + c_1 w, \ \{u, w\} = a_2 u + b_2 v + c_2 w,$$
$$\{v, w\} = a_3 u + b_3 v + c_3 w,$$

où les a_i, b_i, c_i *sont des constantes.*

Théorème de Darboux-Weinstein et feuilletage symplectique

Théorème.

Soit (M, π) *une variété de Poisson et soit* $p \in M$ *où le rang de* π *est* $2r$. *Alors il existe un système de coordonnées* $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, y_1, \ldots, y_l)$ *centré en* p *et tel que*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i<j} \pi_{ij}(y_1, \ldots, y_l) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j},$$

avec

$$\pi_{ij}(p) = 0 \quad \textit{pour} \quad i, j = 1, \ldots, l.$$

Ces coordonnées sont appelées coordonnées de Darboux-Weinstein.

Corollaire.

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $p \in M$ un point régulier où le rang de π est $2r$. Alors il existe un système de coordonnées $(q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, y_1, \dots, y_l)$ centré en p et tel que

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Soit (M, π) une variété de Poisson telle que le rang de π est égale à la dimension de M partout. Alors $\pi_{\#} : T^*M \longrightarrow TM$ est un isomorphisme fibré et on peut alors définir la 2-forme ω par

$$\omega(u, v) = \pi(\pi_{\#}^{-1}(u), \pi_{\#}^{-1}(v)). \tag{12}$$

On obtient ainsi une 2-forme différentielle non dégénérée par construction. D'un autre côté, si $p \in M$, il existe, d'après Corollaire 3.1, un système de coordonnées $(q_1, p_1, \ldots, q_d, p_d)$ tel que

$$\pi = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Ainsi, pour $i = 1, \ldots, d$,

$$\pi_{\#}(dq_i) = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \pi_{\#}(dp_i) = -\frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{13}$$

On déduit alors que

$$\omega = \sum^{d} dq_i \wedge dp_i. \tag{14}$$

Inversement, étant donné une 2-forme symplectique ω sur une variété lisse M. L'application $\omega^\flat : TM \longrightarrow T^*M$ qui à $v \mapsto \omega(v, .)$ est un isomorphisme fibré et on peut donc définir le champ de bivecteur π par

$$\pi(\alpha, \beta) = \omega({\omega^\flat}^{-1}(\alpha), {\omega^\flat}^{-1}(\beta)). \tag{15}$$

Proposition.

Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors le champ de bivecteur π défini par (19) est de Poisson.

Théorème.

(Théorème de Darboux) *Soit* (M, ω) *une variété symplectique de dimension* $2r$ *et soit* $p \in M$*. Alors il existe un système de coordonnées* $(q_1, p_1, \ldots, q_r, p_r)$ *centré en* p *tel que*

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} dq_i \wedge dp_i.$$

Définition.

Un **feuilletage singulier** *au sens de Stefan-Sussmann sur une variété lisse M de dimension d est une partition $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{(\alpha \in I)}$ de M en sous-variétés immergées et connexes $\mathcal{F}_\alpha$, appelées* **feuilles**, *qui vérifie la propriété suivante :*

1. *pour tout point $p \in M$, si $\mathcal{F}_p$ est la feuille contenant p et r sa dimension, alors, il existe un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_d)$ sur un ouvert U contenant p tels que la composante connexe de $U \cap \mathcal{F}_p$ contenant p est égale à $\{y_{r+1} = 0 \ldots = y_d = 0\}$ et, pour toute famille de constantes $(c_{r+1}, \ldots, c_d)$, la sous-variété $\{y_{r+1} = c_{r+1}, \ldots, y_d = c_d\}$ est contenue dans une feuille $\mathcal{F}_\alpha$ de $\mathcal{F}$.*

Considérons maintenant une variété de Poisson (M, π). On dira que deux points $p, q \in M$ sont en relation s'il existe une famille de fonctions $f_1, \dots, f_s$ sur M telle que

$$q = \phi^1_{t_1} \circ \dots \circ \phi^s_{t_s}(p),$$

où $\phi^1_{t_1}, \dots, \phi^s_{t_s}$ sont, respectivement, les flots des champs hamiltoniens $X_{f_1}, \dots, X_{f_s}$. On obtient ainsi une relation d'équivalence $\sim$ sur M et on notera $(\mathcal{S}_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ la répartition de M en classes d'équivalence de $\sim$.

Théorème.

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $(\mathcal{S}_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ la répartition définie ci-dessus. Alors :

1. *pour tout $\alpha \in I$, $\mathcal{S}_\alpha$ est une sous-variété immergée de M de dimension $2r_\alpha$ et, pour tout $p \in \mathcal{S}_\alpha$, $T_p\mathcal{S}_\alpha = Im\pi_\#(p)$;*
2. *pour tout $\alpha \in I$, $\mathcal{S}_\alpha$ admet une forme symplectique ω_α telle que $i : \mathcal{S}_\alpha \hookrightarrow M$ est un morphisme de Poisson ;*
3. *$(\mathcal{S}_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ est un feuilletage singulier au sens de Stefan-Sussmann.*

Algèbroides de Poisson

Soit (M, π) une variété de Poisson. Le **crochet de Koszul** associé à π est le crochet $[\ ,\ ]_\pi$ défini sur $\Omega^1(M)$ par

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi_\#(\alpha)}\beta - L_{\pi_\#(\beta)}\alpha - d\pi(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(M). \tag{16}$$

Proposition.

Soit (M, π) une variété de Poisson. Alors le crochet de Koszul vérifie les propriétés suivantes :

1. $[\ ,\ ]_\pi$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire anti-symétrique et* $[df, dg]_\pi = d\{f, g\}$ *pour tout* $f, g \in C^\infty(M)$.
2. $[\alpha, f\beta]_\pi = \pi_\#(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta]_\pi$, $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.
3. $\pi_\#\left([\alpha, \beta]_\pi\right) = [\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)]$.
4. $[\ ,\ ]_\pi$ *vérifie l'identité de Jacobi, c'est-à-dire,*

$$[[\alpha, \beta]_\pi, \gamma]_\pi + [[\beta, \gamma]_\pi, \alpha]_\pi + [[\gamma, \alpha]_\pi, \beta]_\pi = 0.$$

Soit (M,π) une variété de Poisson. Le crochet de Koszul et l'application d'ancrage permettent de définir, pour tout $0 \leq q \leq d$, une différentielle

$$d_\pi : \mathcal{X}^q(M) \longrightarrow \mathcal{X}^{q+1}(M),$$

et ce en copiant la formule (3) donnant la différentielle usuelles sur les formes, c'est-à-dire, pour $Q \in \mathcal{X}^q(M)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1} \in \Omega^1(M)$,

$$\begin{aligned} d_\pi Q(\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}) &= \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j-1} \pi_\#(\alpha_j).Q(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} Q([\alpha_i, \alpha_j]_\pi, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \end{aligned}$$

Proposition.

1. *Pour tout* $Q \in \mathcal{X}(M)$*,*
$$d_\pi Q = -[\pi, Q]. \tag{18}$$
2. $d_\pi \circ d_\pi = 0.$

Les espaces de cohomologie

$$H^q_\pi(M) = \frac{Ker d_\pi}{Im d_\pi}$$

sont appelés **espaces de cohomologie de Poisson**.

Unimodularité des structures de Poisson

Soit (M, π) une variété différentiable orientable et μ une forme volume sur M. Rappelons que la divergence d'un champ de vecteur X par rapport à μ est la fonction $div_\mu X$ définie par

$$L_X \mu = (div_\mu X)\mu.$$

$$div_{\mu}([X, Y]) = X(div_{\mu} Y) - Y(div_{\mu} X), \tag{19}$$

$$div_{\mu}(fX) = X(f) + f div_{\mu} X. \tag{20}$$

$$div_{f\mu} X = X(\ln f) + div_{\mu} X. \tag{21}$$

Pour toute fonction f sur M, posons

$$X_\mu(f) = div_\mu X_f.$$

Proposition.

1. *X_μ est un champ de Poisson sur M.*
2. *Pour toute fonction $f > 0$, on a*

$$X_{f\mu} = -X_{\ln f} + X_\mu. \tag{22}$$

Dans la cohomologie de Poisson, la classe de cohomologie de X_μ ne dépend pas du volume choisi et définit donc une classe $\mathcal{M} \in H^1_\pi(M)$ appelée **classe modulaire** de π. La structure de Poisson est dite **unimodulaire** si $\mathcal{M} = 0$.

Proposition.

Soit (M, π) une variété de Poisson orientable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *(M, π) est unimodulaire.*
2. *Il existe une forme volume μ sur M telle que, pour tout $f \in C^\infty(M)$,*

$$L_{X_f}\mu = 0.$$

Proposition.

Une structure de Poisson non nulle sur une variété de dimension 2 est unimodulaire si et seulement si elle est symplectique.

Proposition.

Soient M une variété de dimension 3, μ une forme volume sur M et α une 1-forme fermée sur M. Alors la relation

$$i_\pi \mu = \alpha$$

définit un champ de bivecteur de Poisson unimodulaire sur M.

Structures de Poisson linéaires

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une structure de Poisson sur V est dite linéaire si le crochet de deux formes linéaires sur V et une forme linéaire sur V. Ainsi V^* munie du crochet de Poisson devient une algèbre de Lie de dimension finie.

Inversement, soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie n. L'espace $\mathcal{G}^{**}$ bidual de $\mathcal{G}$ s'identifie naturellement à $\mathcal{G}$ et hérite donc d'une structure d'algèbre de Lie dont le crochet sera noté de la même manière que celui de $\mathcal{G}$. On obtient ainsi un crochet sur les formes linéaires de $\mathcal{G}^*$ qui se prolonge à tout $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ de la manière suivante. Pour tout couple $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ le crochet $\{f, g\}$ est définie par

$$\{f, g\}(\alpha) =< \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g] >, \quad \alpha \in \mathcal{G}^*.$$

Proposition.

Le crochet définit ci-dessus munit $\mathcal{G}^*$ d'une structure de Poisson linéaire appelée structure de Lie-Poisson associée à $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$.

Soit G un groupe de Lie connexe et $\mathcal{G} = T_eG$ son algèbre de Lie. La représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}$ est l'endomorphisme de goupes

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$$

défini par

$$Ad_g u = \frac{d}{dt}_{|t=0} gexp(tu)g^{-1}, \quad g \in G, u \in \mathcal{G}.$$

Sa différentielle à l'élement neutre définit une répresentation

$$ad : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l(\mathcal{G})$$

donnée par

$$ad_u v = [u, v], \quad u, v \in \mathcal{G}.$$

Par dualité, on obtient les reprséntations coadjointes respectivement de G et de $\mathcal{G}$ à savoir

$$Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathcal{G}^*)$$

définie par

$$Ad^*_g\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha, \quad g \in G, \alpha \in \mathcal{G}^*;$$

Proposition.

1. *Pour tout $u \in \mathcal{G}$, le champ hamiltonien de la fonction de $\mathcal{G}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\alpha \mapsto \alpha(u)$, noté X_u, est donnée par*

$$X_u(\alpha) = ad_u^*\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{G}^*; \tag{23}$$

et $Im\pi^l_\#(\alpha) = \{X_u(\alpha), u \in \mathcal{G}\}$.

2. $\pi^l_\# : T^*\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^* \times \mathcal{G} \longrightarrow T\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^* \times \mathcal{G}^*$ *est donné par*

$$\pi^l_\#(\alpha, u) = (\alpha, ad_u^*\alpha).$$

3. *Le rang de π^l en un point $\alpha \in \mathcal{G}^*$ est égale à $dim\mathcal{G} - dim\mathcal{G}_\alpha$, en particulier, le rang de π^l à l'origine est nul.*

Théorème.

Soit G un groupe de Lie connexe et soit $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Alors les feuilles symplectiques de la structure de Lie-Poisson sur $\mathcal{G}^*$ coincident avec les orbites de la représentation coadjointe de G.

Structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe d'élément neutre e et de dimension n et soit $\mathcal{G} = T_e G$ son algèbre de Lie. Notons $\mathcal{X}^l(G)$ l'espace des champs de multivecteur invariant à gauche, c'est-à-dire, l'ensemble des champs de multivecteur Q tels que, pour tout $a \in G$,

$$L_{a*}Q = Q,$$

où $L_a : G \longrightarrow G$ est la translation à gauche définie par $L_a(b) = ab$. D'une manière équivalente, $Q \in \mathcal{X}^l(G)$ si et seulement si, pour tout champ de vecteur invariant à droite,

$$[X, Q] = 0.$$

Puisque

$$[X,[Q_1,Q_2]] + [Q_1,[Q_2,X]] + (-1)^{(degQ_1-1)(degQ_2-1)}[Q_2,[X,Q_1]] = 0,$$

on déduit que le crochet de Shouten-Nijenhuis de deux champs de multivecteur invariants à gauche est invariant à gauche. D'un autre côté, l'application de $\mathcal{X}^l(G) \longrightarrow \wedge^*\mathcal{G} = \oplus_{k=0}^n \wedge^k \mathcal{G}$ qui à $Q \mapsto Q(e)$ est un isomorphisme. L'image réciproque d'un élément $q \in \wedge^*\mathcal{G}$ sera

Lemma.

Etant donné une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique crochet sur $\wedge^*\mathcal{G}$ qui étend le crochet d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Si $A \in \wedge^a\mathcal{G}$ et $B \in \wedge^b\mathcal{G}$ alors $[A, B] \in \wedge^{a+b-1}\mathcal{G}$.*
2. *L'anti-commutativité graduée : si $A \in \wedge^a\mathcal{G}$ et $B \in \wedge^b\mathcal{G}$ alors*
$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B, A]. \tag{24}$$
3. *La régle de Leibniz graduée : si $A \in \wedge^a\mathcal{G}$, $B \in \wedge^b\mathcal{G}$ et $C \in \wedge^c\mathcal{G}$ alors*
$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C], \tag{25}$$
$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b}[A, C] \wedge B. \tag{26}$$
4. *L'identité de Jacobi graduée : si $A \in \wedge^a\mathcal{G}$, $B \in \wedge^b\mathcal{G}$ et $C \in \wedge^c\mathcal{G}$ alors*
$$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)}$$
5. *Le crochet d'un élément de $\wedge^*\mathcal{G}$ avec un élément de $\wedge^0\mathcal{G} = \mathbb{R}$ est nul.*

Une structure de Poisson invariante à gauche sur G est la donnée d'un champ de bivecteur π sur G invariant à gauche et tel que $[\pi, \pi] = 0$. En vertu de ce qui prècède, ceci équivaut à la donnée d'un $r \in \wedge^2 \mathcal{G}$ tel que

$$[r, r] = 0. \tag{28}$$

Les éléments de $\wedge^2 \mathcal{G}$ vérifiant (39) sont appelés solutions de **l'équation de Yang-Baxter classique**.

Dans tout ce qui suit, pour tout $r \in \wedge^2 \mathcal{G}$, on notera

$$r : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}$$

l'application définie par

$$\beta(r(\alpha)) = -\alpha(r(\beta)) = r(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{G}^*$$

et $\mathcal{S}_r$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$ image de r.

Lemma.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $r \in \wedge^2\mathcal{G}$. Alors, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}^*$,

$$[r, r](\alpha, \beta, \gamma) = -2 \oint \alpha\left([r(\beta), r(\gamma)]\right). \tag{29}$$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $r \in \wedge^2\mathcal{G}$. Définissons sur $\mathcal{S}_r$ la 2-forme ω_r par

$$\omega_r(u, v) = r(\alpha, \beta),$$

où $u = r(\alpha)$ et $v = r(\beta)$. Il est clair que ω_r est bien définie et non dégénérée. C'est une forme symplectique sur $\mathcal{S}_r$.
Inversement, étant donné un sous-espace vectoriel symplectique $(\mathcal{S}, \omega)$ de $\mathcal{G}$. La forme symplectique ω définit un isomorphisme $\omega^\flat : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathcal{S}$. L'application

$$r : \mathcal{G}^* \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^* \xrightarrow{\omega^\flat} \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{G}$$

définit un élément $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ tel que $(\mathcal{S}_r, \omega_r) = (\mathcal{S}, \omega)$. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les éléments de $\wedge^2\mathcal{G}$ et les sous-espaces vectoriels symplectiques de $\mathcal{G}$.
D'un autre côté, tout élément $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ définit un crochet $[\ ,\ ]_r$ sur $\mathcal{G}^*$ par

$$[\alpha, \beta]_r = ad^*_{r(\beta)}\alpha - ad^*_{r(\alpha)}\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{G}^*.$$

Proposition.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et soit $r \in \wedge^2\mathcal{G}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *r vérifie l'équation de Yang-Baxter classique.*
2. *$\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ et, pour tout $u, v, w \in \mathcal{S}_r$,*

$$\omega_r([u,v],w) + \omega([v,w],u) + \omega([w,u],v) = 0. \quad (30)$$

En plus, si l'une des conditions est vérifiée alors $(\mathcal{G}^*, [\ ,\ ]_r)$ est une algèbre de Lie et $r : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme d'algèbre de Lie.

Proposition.

Soit G un groupe de Lie connexe, soit $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ une solution de l'équation de Yang-Baxter classique. Notons S_r le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathcal{S}_r$. Alors :

1. *Le rang de r^l est constant égale à $\dim\mathcal{S}_r$ et S_r est la feuille symplectique de r^l passant par l'élément neutre.*
2. *L'adhérence $\bar{S}_r$ hérite d'une structure de Poisson invariante à gauche tel que $i : \bar{S}_r \longrightarrow G$ est un morphisme de Poisson et dont toutes les feuilles symplectiques sont denses.*
3. *Les fibres de la fibration $G \longrightarrow G/\bar{S}_r$ sont des sous-variétés de Poisson de G dont les feuilles symplectiques sont denses.*
4. $H^0_{r^l}(M) \simeq C^\infty(G \longrightarrow G/\bar{S}_r)$.

Lemma.

Soit $(\mathcal{G}, < \, , \, >, \omega)$ *une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire bi-invariant et d'une forme symplectique telle que*

$$\omega([u,v],w) + \omega([v,w],u) + \omega([w,u],v) = 0.$$

Alors $\mathcal{G}$ *est abélienne.*

Corollaire.

Soit G *un groupe de Lie compact et* $\mathcal{G}$ *son algèbre de Lie. Alors il y a une correspondance biunivoque entre les solutions de l'équation de Yang-Baxter classique sur* $\mathcal{G}$ *et les sous-algèbres abéliennes de dimension paire de* $\mathcal{G}$*.*

Algèbroide de Lie d'une variété de Poisson

♣.

Soit (M, π) *une variété de Poisson. Le* **crochet de Koszul** *associé à* π *est le crochet* $[\ ,\ ]_\pi$ *défini sur* $\Omega^1(M)$ *par*

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi_\#(\alpha)}\beta - L_{\pi_\#(\beta)}\alpha - d\pi(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(M). \tag{31}$$

Proposition.

Soit (M, π) une variété de Poisson. Alors le crochet de Koszul vérifie les propriétés suivantes :

1. $[\ ,\ ]_\pi$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire anti-symétrique,*
2. $[\alpha, f\beta]_\pi = \pi_\#(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta]_\pi$, $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.
3. $[\ ,\ ]_\pi$ *vérifie l'identité de Jacobi, c'est-à-dire,*

$$[[\alpha, \beta]_\pi, \gamma]_\pi + [[\beta, \gamma]_\pi, \alpha]_\pi + [[\gamma, \alpha]_\pi, \beta]_\pi = 0.$$

♣.

Un algèbroide de Lie au dessus d'une variété M *est la donnée d'un fibré vectoriel* $p : A \longrightarrow M$, *d'un morphisme de fibré* $\# : A \longrightarrow TM$ **(ancre)** *et un crochet* $[\ ,\ ]_A$ *sur* $\Gamma(A)$ *tels que :*

♣.

Un algèbroide de Lie au dessus d'une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $p : A \longrightarrow M$, d'un morphisme de fibré $\# : A \longrightarrow TM$ **(ancre)** *et un crochet $[\ ,\ ]_A$ sur $\Gamma(A)$ tels que :*

1. $(\Gamma(A), [\ ,\ ]_A)$ *est une algèbre de Lie (de dimension infinie),*

♣.

Un algèbroide de Lie au dessus d'une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $p : A \longrightarrow M$, d'un morphisme de fibré $\# : A \longrightarrow TM$ **(ancre)** *et un crochet $[\ ,\ ]_A$ sur $\Gamma(A)$ tels que :*

1. *$(\Gamma(A), [\ ,\ ]_A)$ est une algèbre de Lie (de dimension infinie),*
2. *pour tous $a, b \in \Gamma(A)$, $f \in C^\infty(M)$,*

$$[a, fb]_A = f[a, b]_A + \#(a)(f)b. \quad \textit{(Identity de Leibniz)}$$

♣.

Un algèbroide de Lie au dessus d'une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $p : A \longrightarrow M$, d'un morphisme de fibré $\# : A \longrightarrow TM$ **(ancre)** *et un crochet $[\ ,\ ]_A$ sur $\Gamma(A)$ tels que :*

1. $(\Gamma(A), [\ ,\ ]_A)$ *est une algèbre de Lie (de dimension infinie),*
2. *pour tous $a, b \in \Gamma(A)$, $f \in C^\infty(M)$,*

$$[a, fb]_A = f[a, b]_A + \#(a)(f)b. \quad \textit{(Identity de Leibniz)}$$

Comme conséquence, on aura $\# : \Gamma(A) \longrightarrow \mathcal{X}^1(M)$ est un morphisme d'algèbre de Lie, i.e.,

$$\#([a, b]_A) = [\#(a), \#(b)], \quad a, b \in \Gamma(A).$$

♣.

$(TM, M, [\ ,\ ], \mathrm{Id}_{TM})$ *est un algèbroide de Lie.*

♣.

$(TM, M, [\ ,\ ], \mathrm{Id}_{TM})$ *est un algèbroide de Lie.*

Proposition.

Soit (M, π) *une variété de Poisson. Alors* $(T^*M, M, \pi_\#, [\ ,\ ]_\pi)$ *est un algèbroide de Lie.*

Connexions contravariantes sur une variété de Poisson

♣.

Soit (M, π) *une variété de Poisson.*

Connexions contravariantes sur une variété de Poisson

♣.

Soit (M,π) *une variété de Poisson.*
Une connexion contravariante sur M *est une application*

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

telle que, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$

Connexions contravariantes sur une variété de Poisson

♣.

Soit (M, π) *une variété de Poisson.*
Une connexion contravariante sur M *est une application*

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

telle que, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$

1. $\mathcal{D}$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire,*

Connexions contravariantes sur une variété de Poisson

♣.

Soit (M, π) *une variété de Poisson.*
Une connexion contravariante sur M *est une application*

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

telle que, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$

1. $\mathcal{D}$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire,*
2. $\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\mathcal{D}_\alpha\beta$*,*

Connexions contravariantes sur une variété de Poisson

♣.

Soit (M,π) *une variété de Poisson.*
Une connexion contravariante sur M *est une application*

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

telle que, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$

1. $\mathcal{D}$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéaire,*
2. $\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\mathcal{D}_\alpha\beta$,
3. $\mathcal{D}_\alpha f\beta = f\mathcal{D}_\alpha\beta + \pi_\#(\alpha)(f)\beta$.

Compatibilités entre une métrique riemannienne et un tenseur de Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.*

Compatibilités entre une métrique riemannienne et un tenseur de Poisson

♣.

Soit (M,π,g) une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.

Théorème. (Théorème fondamental de la géométrie riemannienne :Connexion de Levi-Civita)

Il existe sur M une connexion covariante ∇ telle que, pour $X,Y,Z\in\mathcal{X}^1(M)$,

1. $X.g(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$,
2. $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$.

En plus, ∇ est donnée par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y,Z) &= X.g(Y,Z)+Y.g(X,Z)-Z.g(X,Y)\\ &+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X).\end{aligned}$$

♣.

On peut dire que (π, g) *sont compatibles si*

$$\nabla\pi = 0.$$

♣.

On peut dire que (π, g) *sont compatibles si*

$$\nabla\pi = 0.$$

Cette notion de compatibilité est très forte et implique que le rang de π *est constant ce qui exclut beaucoup de classes de variétés de Poisson.*

♣.

Soit (M, π, g) *une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.*

♣.

Soit (M, π, g) une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.

Théorème. (Théorème fondamental de la géométrie de Riemann-Poisson :Connexion de Levi-Civita contravariante)

Il existe sur M une connexion contravariante $\mathcal{D}$ telle que, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$,

1. $\pi_{\#}(\alpha).g^*(\beta, \gamma) = g^*(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma) + g^*(\beta, \mathcal{D}_\alpha\beta)$,
2. $[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{D}_\alpha\beta - \mathcal{D}_\beta\alpha$.

En plus, ∇ est donnée par la formule de Koszul :

$$2g^*(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma) = \pi_{\#}(\alpha).g^*(\beta, \gamma) + \pi_{\#}(\beta).g^*(\alpha, \gamma) - \pi_{\#}(\gamma).g^*(\alpha, \beta)$$
$$+g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) + g^*([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) + g^*([\gamma, \beta]_\pi, \alpha),$$
$$g^*(df, dh) = g(\nabla f, \nabla h).$$

Variétés de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.*

Variétés de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne.*
On dira que (M, π, g) *est de Riemann-Poisson si*

$$\mathcal{D}_\alpha \pi(\beta, \gamma) := \pi_\#(\alpha).\pi(\beta, \gamma) - \pi(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) - \pi(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma) = 0,$$

où $\mathcal{D}$ *est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à* (π, g).

Feuilles symplectiques et algèbres de Lie d'isotropie d'une variété de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson et* $S \subset M$ *une feuille symplectique et* ω_S *sa forme symplectique.*

Feuilles symplectiques et algèbres de Lie d'isotropie d'une variété de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson et* $S \subset M$ *une feuille symplectique et* ω_S *sa forme symplectique.*
Pour tout $x \in S$, *posons* $\mathfrak{g}_x = \ker \pi_\#(x)$. *On a*

$$T_x^* M = \mathfrak{g}_x \oplus \mathfrak{g}_x^\perp, \quad T_x S = \{\pi_\#(\alpha), \alpha \in \mathfrak{g}_x^\perp\}.$$

Feuilles symplectiques et algèbres de Lie d'isotropie d'une variété de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson et* $S \subset M$ *une feuille symplectique et* ω_S *sa forme symplectique.*
Pour tout $x \in S$, *posons* $\mathfrak{g}_x = \ker \pi_\#(x)$. *On a*

$$T_x^* M = \mathfrak{g}_x \oplus \mathfrak{g}_x^\perp, \quad T_x S = \{\pi_\#(\alpha), \alpha \in \mathfrak{g}_x^\perp\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} g_S(\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) &= g^*(\alpha, \beta), \\ \omega_S(\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) &= g_S(A\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_x^\perp. \end{aligned}$$

Feuilles symplectiques et algèbres de Lie d'isotropie d'une variété de Riemann-Poisson

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson et* $S \subset M$ *une feuille symplectique et* ω_S *sa forme symplectique.*
Pour tout $x \in S$*, posons* $\mathfrak{g}_x = \ker \pi_\#(x)$*. On a*

$$T_x^*M = \mathfrak{g}_x \oplus \mathfrak{g}_x^\perp, \quad T_xS = \{\pi_\#(\alpha), \alpha \in \mathfrak{g}_x^\perp\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} g_S(\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) &= g^*(\alpha, \beta), \\ \omega_S(\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) &= g_S(A\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_x^\perp. \end{aligned}$$

Proposition.

(S, g_S) est une variété riemannienne,
$J_S = A(-A^2)^{-1/2} : TS \longrightarrow TS$ est une structure complexe et (S, g_S, J_S) est une variété Kählerienne.

Proposition.

(S, g_S) est une variété riemannienne,
$J_S = A(-A^2)^{-1/2} : TS \longrightarrow TS$ est une structure complexe et
(S, g_S, J_S) est une variété Kählerienne.

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}_x$, posons

$$[\alpha, \beta]_x = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_\pi(x), \quad \langle \alpha, \beta \rangle_x = g^*(\alpha, \beta),$$

où $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha$ et $\widetilde{\beta}(x) = \beta$.

Proposition.

(S, g_S) est une variété riemannienne,
$J_S = A(-A^2)^{-1/2} : TS \longrightarrow TS$ est une structure complexe et (S, g_S, J_S) est une variété Kählerienne.

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}_x$, posons

$$[\alpha, \beta]_x = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_\pi(x), \quad \langle \alpha, \beta \rangle_x = g^*(\alpha, \beta),$$

où $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha$ et $\widetilde{\beta}(x) = \beta$.

Proposition.

$(\mathfrak{g}_x, [\ ,\ ]_x)$ est une algèbre de Lie et $(\mathfrak{g}_x^*, \pi_l, \langle\ ,\ \rangle_x^*)$ est une variété de Riemann-Poisson.

Algèbres de Lie de Riemann-Poisson

♣.

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Lie et* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* $\mathcal{G}$.

Algèbres de Lie de Riemann-Poisson

♣.

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Lie et* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* $\mathcal{G}$.
Le produit de Levi-Civita de $(\mathcal{G}, [\ ,\ ], \langle\ ,\ \rangle)$ *est donné par la formule*

$$2\langle uv, w\rangle = \langle [u,v], w\rangle + \langle [w,v], u\rangle + \langle [w,u], v\rangle.$$

Algèbres de Lie de Riemann-Poisson

♣.

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Lie et* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* $\mathcal{G}$.
Le produit de Levi-Civita de $(\mathcal{G}, [\ ,\ ], \langle\ ,\ \rangle)$ *est donné par la formule*

$$2\langle uv, w\rangle = \langle [u, v], w\rangle + \langle [w, v], u\rangle + \langle [w, u], v\rangle.$$

Proposition.

$(\mathcal{G}^*, \pi_l, \langle\ ,\ \rangle^*)$ *est une variété de Riemann-Poisson si et seulement si, pour tous* $u, v, w \in \mathcal{G}$,

$$[u, [v, w]] = [uv, w] + [v, uw].$$

Définition.

Une algèbre de Lie de Riemann-Poisson est une algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *munie d'un produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$ *tels que le produit de Levi-Civita vérifie*

$$[u,[v,w]] = [uv,w] + [v,uw], \quad u,v,w \in \mathcal{G}.$$

Définition.

Une algèbre de Lie de Riemann-Poisson est une algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *munie d'un produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$ *tels que le produit de Levi-Civita vérifie*

$$[u, [v, w]] = [uv, w] + [v, uw], \quad u, v, w \in \mathcal{G}.$$

Théorème.

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(\mathcal{G}, [\ ,\ ], \langle\ ,\ \rangle)$ *est une algèbre de Lie de Riemann-Poisson.*
2. *La courbure du produit de Levi-Civita est nulle.*
3. $\mathcal{G} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \oplus S_{\langle\ ,\ \rangle}$, *où* $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ *et* $S_{\langle\ ,\ \rangle}$ *sont abéliens et*

$$S_{\langle\ ,\ \rangle} = \{u \in, \mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^* = 0\} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]^\perp.$$

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson régulière. Soit* $\# : T^*M \longrightarrow TM$ *l'isomorphisme défini par* g.

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson régulière. Soit* $\# : T^*M \longrightarrow TM$ *l'isomorphisme défini par* g.
On a

$$TM = TS \oplus \#(\ker \pi_{\#}) \quad et \quad TS = \pi_{\#}(\ker \pi_{\#}^{\perp}).$$

♣.

Soit (M, π, g) *une variété de Riemann-Poisson régulière. Soit* $\# : T^*M \longrightarrow TM$ *l'isomorphisme défini par* g.
On a

$$TM = TS \oplus \#(\ker \pi_\#) \quad et \quad TS = \pi_\#(\ker \pi_\#^\perp).$$

On définit une nouvelle métrique riemannienne g_π *sur* M *par*

$$\begin{aligned} g_\pi(u, v) &= g(u, v),\ u, v \in \#(\ker \pi_\#), \\ g_\pi(\pi_\#(\alpha), \pi_\#(\beta)) &= g^*(\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \ker \pi_\#^\perp, \\ g_\pi(u, \pi_\#(\alpha)) &= 0,\ \alpha \in \ker \pi_\#^\perp, u \in \#(\ker \pi_\#). \end{aligned}$$

Théorème.

Pour tout couple de champs de vecteur (X, Y) *préservant le feuilletage symplectique et* g_π*-orthogonal à ce feuilletage,* $g_\pi(X, Y)$ *est une fonction localement constante le long des feuilles. En particulier, le feuilletage symplectique est un feuilletage riemannien.*

Quelques classes d'exemples

♣.

Soit (M, g) *une variété riemannienne,* $(X_1, \ldots, X_p)$ *une famille de champs de Killing qui commutent deux à deux et* $(a_{ij})_{i,j=1}^{p}$ *une matrice anti-symétrique.*

Quelques classes d'exemples

♣.

Soit (M, g) *une variété riemannienne,* $(X_1, \dots, X_p)$ *une famille de champs de Killing qui commutent deux à deux et* $(a_{ij})_{i,j=1}^{p}$ *une matrice anti-symétrique.*

Pose

$$\pi = \sum_{i,j} a_{ij} X_i \wedge X_j.$$

Quelques classes d'exemples

♣.

Soit (M, g) *une variété riemannienne,* $(X_1, \ldots, X_p)$ *une famille de champs de Killing qui commutent deux à deux et* $(a_{ij})_{i,j=1}^p$ *une matrice anti-symétrique.*
Pose

$$\pi = \sum_{i,j} a_{ij} X_i \wedge X_j.$$

Théorème.

(M, π, g) *est une variété de Riemann-Poisson.*

Théorème.

Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 3 orientable, μ son volume riemannien et $\pi \in X^2(M)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *(M, π, g) est une variété de Riemann-Poisson.*
2. *La 1-forme $\alpha = i_\pi \mu$ satisfait :*

$$d\alpha = 0 \quad \text{and} \quad d|\alpha|^2 + \delta(\alpha)\alpha = 0,$$

où $\delta(\alpha) = -div(\#(\alpha))$.