CIMPA Casablanca, A. Makhlouf

Exercices

Une algèbre de Lie complexe est la donnée d'un espace vectoriel $V = \mathbb{C}^n$ et d'un crochet $[\cdot,\cdot]$ qui est une application bilinéaire

$$[\cdot,\cdot] : V \times V \to V \quad (x,y) \to [x,y]$$

vérifiant pour tout $(x,y,z) \in V^3$
$[x,y] = -[y,x]$ (antisymétrie)
$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$ (condition de Jacobi)

I. (a) Montrer que $[x,x] = 0$ pour tout $x \in V$.

(b) Soit μ une loi d'algèbre associative sur V. Montrer que le crochet $[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x)$ pour $x, y \in V$ défini une algèbre de Lie sur V.

(c) En fixant une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, montrer que l'application bilinéaire est entièrement déterminée par ses constantes de structure $C_{i,j}^k$ où $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k$. Si l'application bilinéaire définit une algèbre de Lie, que peut-on dire de $C_{i,j}^k$ et $C_{j,i}^k$? Préciser le nombre de constantes de structure.

(d) Ecrire le système algébrique que doivent vérifier les constantes de structure pour que le crochet définisse une algèbre de Lie.

II. On pose $n = 2$.

(a) Montrer que toute application bilinéaire symétrique sur $V = \mathbb{C}^2$ définit une algèbre de Lie.

(b) Montrer que la classification à isomorphisme près sur $V = \mathbb{C}^2$ est constituée des deux algèbres de Lie suivantes :

i. $[e_1, e_2]_1 = e_2$

ii. $[e_1, e_2]_2 = 0$

III. On rappelle que l'opérateur cobord de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est donné par l'espace des n-cochaines noté par $C_{CE}^n(\mathcal{L}, \mathcal{L})$.
Soit $\varphi \in C_{CE}^n(\mathcal{L}, \mathcal{L})$, on définit $\delta_{CE}^n \varphi \in C_{CE}^{n+1}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ par

$$\begin{aligned} \delta_{CE}^n \varphi(x_0, \cdots, x_n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [x_i, \varphi(x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)] \\ &+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{i+j} \varphi([x_i, x_j], x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Démontrer que $\delta_{CE}^2 \circ \delta_{CE}^1 = 0$. Pour les plus courageux que $\delta_{CE}^n \circ \delta_{CE}^{n-1} = 0$.

(b) On rappelle que l'ensemble des dérivations d'une algèbre de Lie sur V est donné par les applications linéaires f sur V vérifiant la condition suivante :

$$f([x,y]) = [f(x), y] + [x, f(y)]$$

pour tout x, y dans V.
Calculer les ensembles de dérivations de $(\mathbb{C}^2, [,]_2)$ et $(\mathbb{C}^2, [,]_1)$. En déduire que les deux algèbres ne sont pas isomorphes. Indication : considérer l'application f dans la même base que l'algèbre de Lie et de vérifier la condition sur les vecteurs de base.

(c) Calculer Z^2 et H^2