Structures symplectiques en physique

T. Boudjedaa

Laboratoire de Physique Théorique, Université de Jijel BP98 Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algérie

Abstract

Dans ce mini-cours, on se propose de survoler les structures symplectiques dans différents domaines de la physique. On introduit ces dernières d'une manière naïve et sans préalable et souci de construction rigoureuse en insistant sur leur pratique. De la mécanique du point à la théorie des champs, et passant par la relativté et la quantification, on a essayé de souligner la ressemblance et la simplicité de ces structures en laissant entrevoir cet outil comme pont de généralisation et de passage d'un domaine à un autre.

I. INTRODUCTION

Les crochets de Poisson jouent un rôle primordial en physique, classique et quantique, et comme nous allons le voir, dans les sections suivantes, ils représentent un pont naturel entre les deux physiques (macroscopique et microscopique), c'est à dire, que le passage d'un système physique classique à son correspondant quantique se fait au moyen de ces crochets de Poisson en introduisant la constante fondamentale de quantification $\hbar$ et en adoptant la règle de quantification canonique suivante

$$\widehat{\{O_1, O_2\}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{O_1}, \widehat{O_2}\right] \tag{1}$$

Sans rentrer dans les détails de cette règle (de son origine et de ses limites d'appropriation), nous pouvons affirmer que c'est le moyen presque parfait de quantification en plus de la méthode de quantification de Feynman dont la formulation est intimement reliée au concept classique d'action. Avant d'aborder les différentes manières par lesquelles ces crochets de Poisson (sous leur forme symplectique) habillent les différentes dynamiques des systèmes physiques (finis, continus, relativistes et non relativistes, et quantification) introduisant quelques notions mathématiques de cette structure de Poisson.

A. Crochet de Poisson

Un crochet de Poisson sur un espace Euclidien (ou une partie ouverte de cet espace; variètè lisse P) est une opération qui associe à deux fonctions réelles (lisses) F et G, définies sur P, une fonction réelle (lisse) notée $\{F, G\}$, définie sur P, et qui vérifie les propriètés suivantes:

1) La bilinéarité: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, G\} = \lambda_1 \{F_1, G\} + \lambda_2 \{F_2, G\}\,; \{F, \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2\} = \lambda_1 \{F, G_1\} + \lambda_2 \{F, G_2\}$

2) L'anti-symétrie: $\{F, G\} = -\{G, F\}$

3) La règle de Leibniz: $\{F, GH\} = \{F, G\} H + G \{F, H\}$

4) L'identité de Jacobi: $\circlearrowleft_{F,G,H} \{\{F, G\}, H\} = 0$ ($\circlearrowleft_{F,G,H}$: permutation sur F, G, H).

P muni de cette structure de Poisson est dite variètè de Poisson.

Comme simple exemple, voir la section ci-dessus de la mécanique classique. Dans cet exemple, $P = \mathbb{R}^{2n}$ de dimension paire (dans ce cas on dit aussi structure symplectique) et le crochet canonique de Poisson est

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \tag{2}$$

En particulier

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{3}$$

On peut aussi définir la structure de Poisson sur une varièté de dimension quelconque. En effet, dans ce cas on choisit $P = \mathbb{R}^{2n+l}$ varièté décrite par les coordonnées $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\varsigma})$ avec $\boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_l)$ et on garde la même définiton précédente (2). Remarquons qu'une fonction $F(\boldsymbol{\varsigma})$ de ces variables $\boldsymbol{\varsigma}$ seulement vérifie $\{F, G\} = 0$ pour toute fonction G définie sur P on l'appelle fonction de Casimir. En parrticulier on

$$\{q_i, \varsigma_j\} = 0, \{p_i, \varsigma_j\} = 0, \{\varsigma_i, \varsigma_j\} = 0 \tag{4}$$

Ce crochet de Poisson peut être défini par un champ vectoriel agissant sur P. Les propriètés de bilnéarité et de Leibniz permettent d'associer à ce crochet de Poisson un champ de vecteur dit champ de vecteur hamiltonien suivant la définition suivante: Pour $H : P \to \mathbb{R}$ soit le champ de vecteur $\mathbf{v}_H$ sur P tel que

$$\mathbf{v}_H(F) = \{F, H\} \tag{5}$$

Les équations de mouvement (l'écoulement) de ce champ vectoriel hamiltonien sont les équations d'Hamilton données par

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{d\boldsymbol{\varsigma}}{dt} = 0 \tag{6}$$

et une fonction de Casimir C sur P est déterminée par $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ sur P.

Ce champ de vecteur hamiltonien permet de relier le crochet de Poisson au crochet de Lie de ces champs de vecteur hamiltonien suivant

$$\mathbf{v}_{\{F,H\}} = -[\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_H] = [\mathbf{v}_H, \mathbf{v}_F] \tag{7}$$

Notons $\mathbf{x} = (x^1, x^2, ..., x^m)$ les coordonnées d'un point de cette variété P par l'équation (5) on a $\mathbf{v}_H(x^i) = \left\{x^i, H\right\}$ et on sait que $\mathbf{v}_H = \sum_{i=1}^m a^i(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ce qui donne $a^i(\mathbf{x}) = \left\{x^i, H\right\}$ et par conséquent

$$\{F, H\} = \mathbf{v}_H(F) = \sum_{i=1}^m \left\{x^i, H\right\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \tag{8}$$

or $\left\{x^i, H\right\} = -\mathbf{v}_{x^i}(H) = \sum_{i=1}^m \left\{x^i, x^j\right\} \dfrac{\partial H}{\partial x^j}$ ce qui donne l'écriture suivante

$$\{F, H\} = \sum_{i,j=1}^m \left\{x^i, x^j\right\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \tag{9}$$

On appelle alors fonctions de structure de la variété de Poisson, les crochets fondamentaux $J^{ij}(\mathbf{x}) = \left\{x^i, x^j\right\}$ et la matrice $J(\mathbf{x})$ la matrice de structure et en notation matricielle on écrit

$$\{F, H\} = \sum_{i,j=1}^{m} J^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} = (\nabla F(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x})) = \mathbf{v}_H(F) \tag{10}$$

ce qui donne

$$\mathbf{v}_H = \sum_{i,j=1}^{m} J^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{11}$$

et les équations d'Hamilton prennent la forme suivante

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = J(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) \tag{12}$$

Cette matrice de structure vérifie les propriétés suivantes

$$J^{ij}(\mathbf{x}) = -J^{ji}(\mathbf{x}) \text{ anti-symétrie} \tag{13}$$

$$\circlearrowleft_{i,l,j} \sum_{k=1}^{m} \left(J^{ik}(\mathbf{x}) \frac{\partial J^{jl}(\mathbf{x})}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \text{identité de Jacobi} \tag{14}$$

B. Le crochet de Lie-Poisson

Voyons maintenant comment on peut associer cette structure de Poisson à une structure d'algèbre de Lie (de dimension r). Soit $\mathfrak{g}$ une adL et $(g_1, g_2, ..., g_r)$ ses générateurs et de constantes de structure $\left(c_k^{ij}\right)$. Soit P une variété linéaire de même dimension (r) décrite par les coordonnées $\mathbf{x} = (x^1, x^2, ..., x^r)$ et de base $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_r, ..., \omega_r)$. Pour deux fonctions (lisses) F et H sur V, le crochet de Lie-Poisson est défini par

$$\{F, H\} = \sum_{i,j,k=1}^{m} c_k^{ij} x^k \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \tag{15}$$

où l'on identifie $J^{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{ij} x^k$. Les propriétés $(13, 14)$ peuvent être facilement vérifiées sachant que les c_k^{ij} les vérifient aussi. Les équations d'Hamilton sont alors données par

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j,k=1}^{m} c_k^{ij} x^k \frac{\partial H}{\partial x^j} \tag{16}$$

Remarquons que la présence des c_k^{ij} dans cette définition permet de relier ce crochet de Lie-Poisson directement au crochet de Lie habituel de l'adL $\mathfrak{g}$. En effet, en choisissant $V = \mathfrak{g}^*$ l'espace dual à $\mathfrak{g}$ et sachant que le gradient d'une fonction d'une fonction $F : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de l'espace dual de $\mathfrak{g}^*$; $\nabla F \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ (dimension de $\mathfrak{g}$ finie) alors $\nabla F(\mathbf{x}) \in \mathfrak{g}$ et par conséquent on écrira

$$\{F, H\}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}; [\nabla F(\mathbf{x}), \nabla H(\mathbf{x})] \rangle \tag{17}$$

où $[,]$ est le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\langle ; \rangle$ est le scalaire qui s'obtient par application des éléments de $\mathfrak{g}^*$ (les formes linéaires) sur les éléments de $\mathfrak{g}$. Les équations d'Hamilton redeviendront

$$\frac{dx^i}{dt} = \langle \mathbf{x}; [g_i, \nabla H(\mathbf{x})] \rangle \tag{18}$$

C. Structure symplectique

Remarquons d'abord que dans le cas traité précédemment de la dimension $m = 2n + l$, les coordonnées $\boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_l)$ qui sont des fonctions de Casimir sont à l'origine de

$$\det J(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\varsigma}) = 0 \tag{19}$$

et le rang de $J(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\varsigma})$ est $2n$. Introduisons d'abord ce qu'on appelle le rang de la variété de Poisson en utilsant la relation entre le crochet de Poisson et le champ de vecteur hamiltonien. Suivant l'équation (11) on a

$$\mathbf{v}_{x^j} = \sum_{i=1}^{m} J^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{20}$$

On sait que pour une fonction $F : P \to \mathbb{R}$ sa différentielle est donnée par $dF = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$ en plus nous savons que les champs de vecteur $(\mathbf{v}_{x^i})_{i=1,..,m}$ forment une base de l'espace tangent $TP|_x$ et les formes linéaires (différentielles) $\left(dx^i\right)_{i=1,..,m}$ une base de l'espace cotangent $T^*P|_x$ définissons alors l'application linéaire de $\mathbf{B}|_{\mathbf{x}} : T^*P|_{\mathbf{x}} \to TP|_{\mathbf{x}}$ telle que $\mathbf{B}\left(dx^i\right) = \mathbf{v}_{x^j}|_{\mathbf{x}}$nous aurons alors

$$\mathbf{B}\left(dH(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_H|_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^{m} J^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial x^j} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}} \tag{21}$$

Le rang de la variète de Poisson au point $\mathbf{x}$ est alors défini comme le rang de cette application linéaire $\mathbf{B}|_{\mathbf{x}}$ et par conséquent c'est le rang de la matrice de structure $J(\mathbf{x})$ (suite à sa multiplication dans l'expression de $\mathbf{B}|_{\mathbf{x}}$). Comme $J(\mathbf{x})$ est une matrice antisymétrique alors le rang de la variété de Poisson, en chaque point $\mathbf{x}$, est pair et est égale à $\dim(P) - \dim(Ker(\mathbf{B}|_{\mathbf{x}})) = \dim(\mathrm{Im}(\mathbf{B}|_{\mathbf{x}}))$ avec

$$Ker(\mathbf{B}|_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{B}(\omega) = 0/\omega \in T^*P|_{\mathbf{x}}\} \tag{22}$$

$$\mathrm{Im}(\mathbf{B}|_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{v}_H|_{\mathbf{x}} / H : P \to \mathbb{R}\} \tag{23}$$

Une variètè de Poisson est une variètè symplectique si son rang maximal est égal à sa dimension en tout point $\mathbf{x}$. Ce que veut dire que $J(\mathbf{x})$ est inversible en tout point $\mathbf{x}$. Sa matrice inverse vérifie

$$\left(J^{-1}\right)^{ij}(\mathbf{x}) = -\left(J^{-1}\right)^{ji}(\mathbf{x}) \text{ anti-symétrie} \tag{24}$$

$$\circlearrowleft_{i,j,k} \left(\frac{\partial \left(J^{-1}\right)^{ij}(\mathbf{x})}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \text{identité de Jacobi} \tag{25}$$

II. STRUCTURES SYMPLECTIQUES EN MÉCANIQUE CLASSIQUE: RAPPEL ET NOTATIONS

A. Formalisme Lagrangien

En mécanique classique, l'état d'un système physique de N particules à un instant est déterminé au moyen des coordonnées généralisées q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$. L'expérience a montré que la donnée simultanée de q_i et $\dot{q}_i$ détermine complétement l'état du système et permet de prédire son mouvement futur. Mathématiquement, on dit que les accélérations $\ddot{q}_i = \dfrac{d^2q_i}{dt^2}$sont uniquement déterminées par la donnée de q_i et $\dot{q}_i$.

Les relations qui relient $\ddot{q}_i$ aux q_i et $\dot{q}_i$ sont dites equations de mouvement. Ces équations dans leur forme la plus générale sont solution d'un problème variationnel dit principe de moindre action ou principe de Hamilton. Ce principe stipule qu'à chaque système physique on peut associer une grandeur scalaire dite action de Hamilton $S\left[q(t)\right]$ qui est une fonctionnelle du chemin $\{q_i(t)\}$ par le biais d'une fonction scalaire dite fonction de Lagrange ou Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ reliée à $S\left[q(t)\right]$ par:

$$S\left[q(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{26}$$

et le chemin décrivant le mouvement du système physique est solution de :

A t_1, le système occupe $q_i(t_1) = q_i^{(1)}$ et à t_2 le système occupe $q_i(t_2) = q_i^{(2)}$ tel que: $S\left[q(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0 \text{ ou bien } \delta S\left[q(t)\right] = S\left[q(t) + \delta q(t)\right] - S\left[q(t)\right] \text{ avec } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{27}$$

Un simple calcul variationnel donne

$$\delta S\left[q(t)\right] = \sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i \tag{28}$$

Le premier terme est nul grâce à $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ et le deuxième donne pour δq_i quelconque:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0,\ i = 1, 2, ..., 3N. \tag{29}$$

Ces équations sont dites équations de Lagrange.

1. *Lois de conservation*

a. Uniformité du temps et conservation de l'énergie: Dans ce cas la fonction de Lagrange d'un système physique fermé ne dépend pas explicitement du temps:

$$dL = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right), \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i\right) \tag{30}$$

or en vertu de l'équation de mouvement $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right) = 0 \tag{31}$$

on appelle cette intégrale première, l'énergie:

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L,\ \text{l'additivité de } E \text{ du système résulte de celle de } L. \tag{32}$$

b. Homogénéité de l'espace et conservation de l'impulsion Au cours d'un déplacement infinitesimal $q_i \rightarrow q_i + \epsilon$ (les vitesses restent constantes, on dit aussi déplacement parallèle), l'invariance par translation donne:

$$\delta L = \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \epsilon = 0, \text{ie}, \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{33}$$

Elle exprime la conservation de l'impulsion totale du système puisque d'après les équations (29) .On appelle impulsion généralisée: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ et force généralisée $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, et ces équation de mouvement (29) deviennent:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i, \text{ c'est l'équation de Newton généralisée.} \tag{34}$$

Il est facile de s'assurer que ces équations forment un système d'équations différentielles du second ordre. Le choix de la fonction de Lagrange est déterminant pour le système et on peut même définir un système physique au moyen de sa fonction de Lagrange. Cette fonction de Lagrange est additative c'est à dire: si A et B sont deux systèmes physiques isolés et n'interagissant pas l'un avec l'autre alors le Lagrangien du système total est : $L = L_A + L_B$. L'invariance des équations de mouvement est vérifiée si: $L \to \lambda L$ ou bien $L \to L + \frac{df(q, \dot{q}, t)}{dt}$.

B. Formalisme Hamiltonien

Quelques fois il est plus utile de déterminer l'état mécanique du système physique pas au moyen des coordonnées et vitesses généralisées mais plutôt avec les coordonnées et les impulsions généralisées. Le moyen mathématique avec lequel on réalise ce changement de variables est connu sous le nom de transformation de Legendre. En effet:

$$dL = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) \tag{35}$$

On peut écrire aussi

$$d\left(\sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(-\dot{p} dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) \tag{36}$$

c'est à dire que $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$ est une fonction de q_i et p_i qu'on appelle la fonction d'Hamilton ou hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L, \text{ avec } dH = \sum_{i=1}^{3N} \left(-\dot{p} dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) \tag{37}$$

qui nous permet de déduire les équations d'Hamilton

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ et } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{38}$$

qui ne sont rien d'autres que les équations de mouvement dans leur forme hamiltonienne; dites équations canoniques de mouvement. Ces équations son aussi solution du problème variationnel

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) dt, \text{avec } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \text{ et } \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 \tag{39}$$

Il est clair que H s'identifie à l'énergie $E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{3N} p_i\dot{q}_i - L = H$ et en plus pour L indépendant du temps H est indépendant du temps et par conséquent

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}\right) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(-\dot{p}_i\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}_i\right) = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{40}$$

donc $\frac{dE}{dt} = 0$, E est conservée. Pour L dépendant du temps on a

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt = d\left(\sum_{i=1}^{3N} p_i\dot{q}_i - L\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \text{ie, } \frac{\partial H}{\partial t})_{p,q} = -\frac{\partial L}{\partial t})_{q,\dot{q}}. \end{aligned} \tag{41}$$

C. Formalisme des crochets de Poisson

Soit $f\,(p,q,t)$ une fonction des coordonnées, des impulsions et du temps,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{42}$$

Notons: $\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = \{H, f\}$ le crochet de Poisson de H et f, on écrira alors:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{43}$$

Si f est une intégrale première alors: $\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$ et si en plus elle ne depend pas explicitement du temps alors $\{H, f\} = 0$. Avec ses crochets, les équations canoniques (d'Hamilton) prennent alors la forme simple suivante:

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}\,,\ \dot{p}_i = \{H, p_i\} \tag{44}$$

c. Propriétés des crochets de Poisson On définit le crochet de Poisson de deux fonctions $f(p,q,t)$ et $g(p,q,t)$ par:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right), \tag{45}$$

et on verifie facilement les propriétés suiavantes:

$$\begin{aligned}
\{f_1+f_2,g\} &= \{f_1,g\}+\{f_2,g\}\,,\{f,g\}=-\{g,f\} \\
\{f_1.f_2,g\} &= \{f_1,g\}.f_2+f_1.\{f_2,g\}\,,\{f,const\}=0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\},\{f,q_i\}=\frac{\partial f}{\partial p_i},\ \ \{f,p_i\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i} \\
\{q_i,q_k\} &= \{p_i,p_k\}=0 \text{ et } \{p_i,q_j\}=\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\circlearrowleft\ _{f,g,h}\{f,\{g,h\}\}=0 \text{ identité de Jacobi}$$

Théorème de Poisson:

Si f et g sont des intégrales premières alors: $\{f,g\}=const$, $\{f,g\}$ est une intégrale première. En effet: pour f et g independante du temps, dans l'identité de Jacobi posons $h=H$, et comme $\{H,f\}=\{H,g\}=0$ il vient que

$$\{H,\{f,g\}\}=0 \tag{47}$$

d'où $\{f,g\}=const$. En général on a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{f,g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{H,\{f,g\}\} \\
&= \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f,\{g,H\}\}-\{g,\{H,f\}\} \\
&= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}+\{H,g\}\right\} \\
&= \left\{\frac{df}{dt},g\right\}+\left\{f,\frac{dg}{dt}\right\}=0
\end{aligned} \tag{48}$$

D. Transformations canoniques

Dans le formalisme lagrangien, le choix des coordonnées généralisées n'est limité par aucune condition, c'est à dire qu'une transformation générale qui fait passer de l'ancienne variable q à une nouvelle variable Q telle que

$$Q=f(q,t) \tag{49}$$

donne via le principe variationnel d'action la même forme de l'équation de Lagrange, on dit que cette équation est invariante par cette transformation. Cette invariance n'est pas garantie dans le cas des variables canoniques de l'espace des phases. Une transformation des anciennes variables aux nouvelles est soumise à des conditions dites de canonicité préalable qui assurent l'invariance des équations d'Hamilton. En effet, soit la transformation suivante $(q,p) \to (Q,P)$ la condition pour qu'on obtienne des équations d'Hamilton pour ces nouvelles variables de l'espace des phases est en premier lieu

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(P\dot{Q} - H'(Q,P,t)\Big)\, dt = 0 \tag{50}$$

où H' est le nouveau Hamiltonien. En second lieu, il faudrait que ces variables décrivent la même dynamique c'est à dire que ce principe d'action doit être équivalent au premier

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \big(p\dot{q} - H(q,p,t)\big)\, dt = 0 \tag{51}$$

en d'autres termes on doit avoir

$$pdq - H(q,p,t)dt = PdQ - H'(Q,P,t)dt + dF \tag{52}$$

$F \equiv F_1(q,Q,t)$ est dite fonction génératrice de la transformation et on a en l'occurence

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{53}$$

Des fois il est plus commode de mixer les variables et redéfinir alors une fonction génératrice en fonction, par exemple, de (q,P) suivant

$$F \equiv F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + QP \tag{54}$$

qui nous donne

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{55}$$

et ainsi de suite

$$F \equiv F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - qp, F \equiv F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) - qp + QP \tag{56}$$

Ces transformations canoniques suggèrent que l'appellation coordonnées et impulsions soit diluée en coordonnées d'espace des phases et octroie un rôle totalement symétrique à ces variables qu'on appelera sans ambiguité "coordonnées symplectiques". L'invariance des équations d'Hamilton par ces transformations s'exprime clairement dans la condition suivante sur les crochets de Poisson et qui exprime les propriétés du mouvement sont invariants et ne dépendent pas du choix des coordonnées "symplectique", dite invariance symplectique

$$\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P} \tag{57}$$

et en particulier

$$\{Q,Q\}_{q,p} = \{Q,Q\}_{Q,P} = 0, \{P,P\}_{q,p} = \{P,P\}_{Q,P} = 0, \{P,Q\}_{q,p} = \{P,Q\}_{Q,P} = 1 \qquad (58)$$

Théorème de Louiville: Dans une transformation canonique le volume de l'espace des phases ($\dim E = 2n$) est invariant et en particulier chacune des hypersurfaces (ou surfaces de dimension inférieure ($\dim E_s = 2s$));ie,

$$\int\int ... \int dq_1 dq_2 ... dq_s dp_1 dp_2 ... dp_s = \int\int ... \int dQ_1 dQ_2 ... dQ_s dP_1 dP_2 ... dP_s \quad 1 \leq s \leq n \qquad (59)$$

E. Equation d'Hamilton-Jacobi

L'équation d'Hamilton-Jacobi constitue, à elle seule, un moyen de chercher les solutions des équations de mouvement, en ce sens qu'elle est équivalente aux équations de Lagrange ou d'hamilton (ou leur version en crochet de Poisson). Elle est construite à partir des relations qu'on a déjà établies auparavant à savoir la relation entre l'action, l'impulsion et l'énergie (hamiltonien), ie,

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial t} + H(q,p,t) = 0, \; \frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q} = p \qquad (60)$$

En d'autres termes, c'est une équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction action $S(q,t)$ sous la forme suivante

$$\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S(q,t)}{\partial q}, t) = 0 \qquad (61)$$

F. Forme symplectique de la mécanique

Si nous disposons les coordonnées de l'espace des phases comme suit:

$\boldsymbol{\eta} = (q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ...p_n)^T$ un vecteur de $2n$ composantes, nous pouvons alors reécrire les équations d'Hamilton sous la forme matricielle suivante

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{J}\frac{\partial H(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \text{ avec } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (62)$$

La transformation $(q,p) = \boldsymbol{\eta} \to (Q,P) = \boldsymbol{\xi}$ prendra la forme vectorielle suivante

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}), \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{M}\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} \text{ avec } \mathbf{M}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_i}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} \qquad (63)$$

ce qui transformera l'équation précedente en

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T\frac{\partial H(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \text{ avec } \mathbf{M}^T_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_j}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \qquad (64)$$

Une transformation canonique verifiera alors la condition de l'invariance des équations d'Hamilton si

$$\mathbf{MJM}^T = \mathbf{J} \;\text{ et alors on aura } \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{J}\frac{\partial H(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{65}$$

Cet ensemble de matrices $\mathbf{M}$ vérifiant la condition $\mathbf{MJM}^T$ muni de la régle de multplication des matrices forme un groupe dit groupe "symplectique". Enfin, nous avons les invariances suivantes sur les crochets de Poisson

$$\{f,g\}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathbf{J}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \{f,g\}_{\boldsymbol{\xi}} \tag{66}$$

et en particulier

$$\{\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\}_{\boldsymbol{\xi}} = \{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\}_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J} \tag{67}$$

et pour l'invariance du volume

$$\int d\boldsymbol{\xi} = \int |\det \mathbf{M}|\, d\boldsymbol{\eta} = \int d\boldsymbol{\eta} \text{ avec } \det \mathbf{M} = \pm 1 \tag{68}$$

III. STRUCTURE SYMPLECTIQUE ET CONTRAINTES

A. Définition du lagrangien singulier:

Le mouvement d'un système donné est en général décrit par les équations dites équations d'Euler-Lagrange. Pour ces équations, toutes les accélérations sont en principe fonction des positions et des vitesses mais il s'avère que des fois ceci n'est pas possible et dans ce cas on dit que le système est non standard et que son lagrangien est singulier. Dans ce cas, des contraintes sont inhérentes à l'évolution du système et leur introduction devient alors nécessaire dans la description pour tenir compte de leur effet. Pour plus de simplicité, ces contraintes seront supposées indépendantes du temps.

Pour un premier temps, et dans le cas où ces contraintes sont absentes, rappelons la description lagragienne, hamiltonienne et celle des crochets de Poisson de l'évolution classique dans le cas d'un système avec un nombre fini de degré de liberté.

La description lagrangienne repose sur la donnée d'une fonction dite le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ où q_i et $\dot{q}_i$ $(i = 1, ..., n)$ représentent les coordonnées et les vitesses. On introduit alors la fonctionnelle dite action du système S définit par l'expression

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt, \tag{69}$$

Rappelons ce qui a été dit dans la section précédente, les équations de mouvement sont obtenues par le principe de moindre action qui stipule que la variation de la fonctionnelle action S, entre les deux instants t_1 et t_2, doit être stationnaire suivant les conditions aux limites variationnelles

$$\delta S = 0, \delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0, \delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_i \tag{70}$$

Un calcul direct des variations donne alors

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i dt \tag{71}$$

Sachant que cette variation doit être nulle quelque soit δq_i alors on obtient ces équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{72}$$

ou bien sous une forme appropriée en fonction de p_i comme

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{73}$$

où les p_i sont appelées moments conjugués. Il est clair, que la première équation de (73) définit p_i alors que la deuxième est la véritable équation du mouvement au sens Newtonien.

Comme on l'a déjà vu, l'approche hamiltonienne consiste à remplacer les n vitesses généralisées $\dot{q}_i$ par les p_i définis par (73). On passe alors de la description relative à un espace de configuation à n dimensions à un espace à $2n$ dimensions dit espace des phases. Dans ce dernier, les variables (q_i, p_i), $i = 1, ..., n$, sont totalement indépendantes et il est alors plus commode d'introduire nouvelle fonction $H(q_i, p_i, t)$ appelée hamiltonien qui permet de décrire l'évolution.

Cette fonction est définie au moyen de la transformation de Legendre suivante

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \tag{74}$$

avec les $\dot{q}_i$ solutions implicites des $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

L'action (69) sera donnée par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right) dt, \tag{75}$$

et le principe de moindre action se reformule alors comme suit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \delta q_i\right) dt \tag{76}$$

Les variations δp_i et δq_i étant indépendantes, on retrouve alors l'équivalent des équations d'Euler-lagrange précédentes comme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n \tag{77}$$

ce sont les équations d'Hamilton.

On définit d'une manière générale le crochet de Poisson de deux fonctions (dites observables) $f\left(q_i, p_i, t\right)$ et $g\ \left(q_i, p_i, t\right)$ définies sur cet espace des phases comme suit

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{78}$$

Ces crochets de Poisson vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \qquad \text{(Antisymétrie)} \\ \{f + h, g\} &= \{f, g\} + \{f, h\} \quad \text{(Linéarité)} \\ \{fh, g\} &= f\{h, g\} + \{f, g\} h \quad \text{(Identité de Leibniz)} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 \quad \text{(Identité de Jacobi)} \end{aligned} \tag{79}$$

En particulier, les équations d'Hamilton peuvent s'écrire simplement via ces crochets de Poisson comme

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad i = 1, ..., n \tag{80}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, ..., n \tag{81}$$

1. Lagrangien singulier

Le moment conjugué p_i , définit par (73), dépend de q et de $\dot{q}$, et sa différentielle est donné par

$$dp_i = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \tag{82}$$

ou bien

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \tag{83}$$

Remplaçons la relation (73) dans (83) on obtient

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial L^2}{\partial q_j \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j \tag{84}$$

ou bien suivant l'équation (**??**) on a

$$\sum_j W_{ij}\left(q,\dot{q}\right)\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L^2}{\partial q_j \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \tag{85}$$

où W est la matrice hessienne définie par

$$W_{ij} = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \tag{86}$$

Si $\det W \neq 0$ alors on peut exprimer toutes les $\ddot{q}_i$ comme fonctions de $\dot{q}_i$ et q_i et on dit qu'on a un lagrangien non singulier. Par contre, si $\det W = 0$ alors la matrice W n'est pas inversible et le lagrangien est dit singulier.

Autrement, nous savons que cette matrice hessienne n'est autre que la matrice jacobienne $\partial p_i/\partial \dot{q}_j$ et par conséquent le passage de la description lagrangienne à la description hamiltonienne n'est possible que si $\det W \neq 0$ où l'on remplace les vitesses $\dot{q}_i$ en fonction de q_i et p_i comme

$$\dot{q}_i = f\left(q_i, p_i\right) \tag{87}$$

A ce stade, défnissons de façon générale les crochets de Poisson (généralisés) par

$$\{f, g\}_{GPB} = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}, \qquad i,\ j = 1, 2, ..., 2n \tag{88}$$

où $J_{ij} = \left\{\xi_i, \xi_j\right\}$ est un élément de matrice antisymétrique appelée matrice de structure et les variables ξ_j sont les variables de l'espace des phases

$$\left(\xi_1,\ \xi_2, ..., \xi_n,\ \xi_{n+1}, ..., \xi_{2n}\right) = \left(q_1,\ q_2, ...,\ q_n,\ p_1, ..., p_n\right). \tag{89}$$

L'évolution sera donnée par

$$\dot{f} = \{f, H\}_{GPB} \tag{90}$$

et en particulier pour la variable ξ_i on a

$$\{\xi_i, f\}_{GPB} = \sum_j J_{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \tag{91}$$

B. Méthode de Dirac:

Les systèmes hamiltoniens avec contraintes représentent une classe importante de systèmes physiques décrits par des lagrangiens singuliers. Dans ce cas, les moments conjugués ne sont pas tous inversibles par rapport aux vitesses. L'hamiltonien peut toujours être formulé au moyen de la transformation de Legendre mais les équations canoniques doivent être corrigées de façon qu'elles contiennent les effets des contraintes en question.

Dans le formalisme de Dirac, les contraintes inhérentes seront générées et sont appelées contraintes primaires. Grâce aux conditions de consistance, ces contraintes primaires peut générer de nouvelles contraintes, appelées contraintes secondaires. Cette façon itérative de calculer les différentes contraintes dans le formalisme de Dirac est appelée algorithme de Dirac-Bergmann. Par ailleurs, les crochets de Poisson doivent alors être remplacés par d'autres crochets, appelés crochets de Dirac.

1. *Formalisme hamiltonien et égalité faible*

Soit un lagrangien singulier, et notons $M = \dim(W) - rang\,(W)$, dans ce cas on fait apparaitre alors M relations notées comme

$$\phi_m\,(q,p) = 0,\;\; m = 1,..,M \tag{92}$$

qui dépendent uniquement des q et des p sans faire intervenir les vitesses.

Ces relations sont appelées contraintes primaires selon la terminologie de Dirac. En présence des contraintes primaires $\phi_m\,(q,p) = 0,\;\; m = 1,..,M$, on procède par analogie au formalisme lagrangien avec contraintes (multiplicateurs de Lagrange) en remplaçant l'hamiltonien canonique $H_c = p_i\dot{q}_i - L$ par un hamiltonien total H_T contenant ces contraintes, comme suit

$$H_T\,(p,q) = H_c\,(p,q) + \lambda_m\phi_m\,(p,q)\,, \tag{93}$$

où les quantités λ_m sont appelées, dans ce cas, les multiplicateurs de Dirac.

Le lagrangien L devient par conséquent

$$L \rightarrow \tilde{L} = p_i\dot{q}_i - H_T\,(p,q) \tag{94}$$

et en utilisant, comme d'habitude, le principe de moindre action, on a

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \delta\lambda_m\phi_m\right]dt = 0 \tag{95}$$

qui pour δp_i , δq_i et $\delta\lambda_m$ arbitraires donne

$$\dot{q}_i \;=\; \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i},\quad i = 1,..,n \tag{96}$$

$$\dot{p}_i \;=\; -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i},\quad i = 1,..,n \tag{97}$$

$$\phi_m \;=\; 0,\qquad m = 1,..,M \tag{98}$$

qui sont les équations de Hamilton qui tiennent compte des contraintes primaires ϕ_m.

L'évolution d'une observable $F(p,q)$ est alors

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\lambda_m \quad ; \quad \phi_m = 0. \tag{99}$$

ou bien en terme de crochets de Poisson

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \quad ; \quad \phi_m = 0. \tag{100}$$

Ces crochets de Poisson sont calculés avant d"imposer les contraintes $\phi_m = 0$. qui sous forme plus commode, on reécrit sous la forme

$$\dot{F} = \left(\{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}\right)\big|_{\phi_m=0} \tag{101}$$

Sachant que $\{F, \lambda_m\}\, \phi_m\big|_{\phi_m=0} = 0$ on déduit que

$$\dot{F} = \{F, H_T\}\big|_{\phi_m=0} \tag{102}$$

Notation: Pour tenir compte des contraintes, on introduit la notion d'égalité faible (" $\approx$ ") valable sur le sous-espace défini par $\phi_m = 0$, alors que l'égalité dite forte ("=") est valable dans tout l'espace des phases. Ce qui permet d'écrire, l'équation d'évolution

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}, \tag{103}$$

et pour les variables canoniques on aura

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\}, \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\}. \tag{104}$$

2. Contraintes secondaires et Algorithme de Dirac-Bergmann

Les contraintes primaires doivent être conservées lors d'une évolution, c'est à dire

$$\frac{d\phi_{m'}}{dt} = \dot{\phi}_{m'} \approx 0, \quad m' = 1, ...M \tag{105}$$

ou bien autrement d'aprés (103)

$$\dot{\phi}_{m'} = \{\phi_{m'}, H_T\} \approx 0 \Leftrightarrow \{\phi_{m'}, H_c\} + \lambda_m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0, \qquad m', m = 1, ...M. \tag{106}$$

qu'on appelle "conditions de consistance".

Ce système (106) est un système d'équations algébriques non homogènes, qui permet de déterminer (si possible) les multiplicateurs de Dirac λ_m.

En réalité, l'étude de ce système va nous amener à une des quatre situations suivantes:

1) Les "conditions de consistance" donnent au moins une équation érronée comme par exemple $1 \approx 0$. Dans ce cas, il y a certainement une anomalie donc inutile d'aller plus loin avant de modifier le lagrangien lui même.

2) Les "conditions de consistance" déterminent toutes les multiplicateurs de Dirac λ_m avec $m = 1, ...M$.

Dans ce cas, l'itération s'arrête.

3) Les "conditions de consistance" permettront de déterminer seulement quelques paramètres λ_m (pas tous), en plus de quelques équations qui sont identiquement vraies telles que $0 \approx 0$.

Là aussi l'itération s'arrête.

4) Les "conditions de consistance" peuvent donner des nouvelles relations entre les p et les q sans faire intervenir les multiplicateurs λ_m qu'on note par $\varphi_k(q,p) \approx 0$, $k = 1, ..., K$.

Ces relations, $\varphi_k(q,p) \approx 0$, $k = 1, ..., K$, sont les contraintes secondaires et elles sont indépendantes des contraintes primaires ϕ_m et doivent intervenir dans l'évolution du système.

Ces contraintes secondaires $\varphi_k(q,p) \approx 0$ doivent aussi être preservées dans le temps, ie, $\dot{\varphi}_k(q,p) \approx 0$ et on obtient leurs "conditions de consistance" comme

$$\dot{\varphi}_k \approx 0 \Leftrightarrow \{\varphi_k, H_c\} + \lambda_m \{\varphi_k, \phi_m\} \approx 0, \quad k = 1, ...K. \tag{107}$$

L'analyse va nous conduire à nouveau vers l'une des quatre situations précédentes. Nous répétons cette itération, en exigeant que la dérivée des contraintes secondaires doit s'annuler et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les contraintes avec un certain nombre de multiplicateurs λ_m soient déterminées. Ce processus est connu comme l'algorithme de Dirac-Bergmann.

3. Classification des contraintes

Soit $\{\phi_j \approx 0\}$ avec $j = 1, ..., J = M + K$, l'ensemble des contraintes (primaires et secondaires) tels que: M est le nombre des contraintes primaires et K celui des contraintes secondaires.

-La fonction $F(q,p)$ est dite de première classe si son crochet de Poisson avec chacune des contraintes (primaires, secondaires) $\phi_j \approx 0, \quad j = 1, ..., J$ est nul sur la surface des contraintes c-à-d $\{F, \phi_j\} \approx 0$.

-La fonction $F(q,p)$ est dite de deuxième classe, si $\{F, \phi_j\} \not\approx 0$ (au moins pour un seul j).

On va supposer que toutes les contraintes de notre système (primaires et secondaires) sont de deuxième classe.

On note ϕ_m, $m = 1, ..., M$ les contraintes primaires et ϕ_s , $s = 1, ..., K$ les contraintes secondaires. Ecrivons les "conditions de consistance"

$$\{\phi_k, H_c\} + \lambda_m \{\phi_k, \phi_m\} \approx 0, \quad m = 1, ..., M \ \text{ et } \ k = 1, ..., J \tag{108}$$

avec

$$H_T = H_c + \lambda_m \phi_m, \quad m = 1, ..., M \tag{109}$$

Réécrivons ces "conditions de consistance" sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & .... & \{\phi_1, \phi_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} \end{pmatrix}}_{=\Omega} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\lambda}} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} -\{\phi_1, H_c\} \\ \vdots \\ -\{\phi_J, H_c\} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\eta}} \tag{110}$$

ou bien $\Omega\lambda \approx \eta$ avec Ω est une matrice de J lignes et M colonnes.

Formons maintenant la matrice carrée Δ définie par

$$\Delta_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\} \quad , \ \alpha, \alpha' = 1, ..., J \tag{111}$$

Cette matrice est antisymétrique et contient la matrice Ω comme bloc; et explicitement elle est definie comme

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & .... & \{\phi_1, \phi_M\} & \{\phi_1, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} & \{\phi_J, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_J, \phi_J\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & .... & \{\phi_1, \phi_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} \end{matrix}}_{=\Omega} & \underbrace{\begin{matrix} \{\phi_1, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_{M+1}\} & .... & 0 \end{matrix}}_{=\omega} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{112}$$

où ω est une matrice avec J lignes et $J - M$ colonnes.

On montre que $\det(\Delta) \neq 0$ et en plus la matrice Δ doit être de dimension paire car le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul. Considérons maintenant le vecteur colonne θ à J composante

$$\theta = \left(\lambda_1 \;\; .... \;\; \lambda_M \; \underbrace{0 \;\; .... \;\; 0}_{J-M} \right)^t \tag{113}$$

ou autrement écrit

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{114}$$

Calculons le produit $\Delta\theta$ par bloc comme suit

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = (\Omega\omega) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \Omega\boldsymbol{\lambda} \tag{115}$$

puis comparons la avec la relation $\Omega\lambda \approx \eta$, on aura

$$\Delta.\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\eta} \tag{116}$$

comme Δ est inversible on obtient ainsi

$$\boldsymbol{\theta} \approx \Delta^{-1}.\boldsymbol{\eta} \tag{117}$$

ou bien

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha \approx \Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad \alpha, \alpha' = 1, ..., J$$

mais comme $\theta = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0})^t$ on déduit que

$$\theta_m \;=\; \lambda_m \approx \Delta^{-1}_{m,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J \tag{118}$$

$$\text{et } \theta_\alpha \;=\; 0 \approx \Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad \alpha = M+1, ..., J \text{ et } \alpha' = 1, ..., J \tag{119}$$

Comme les éléments de matrice Δ sont les crochets $\Delta_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}$, $\alpha, \alpha' = 1, ..., J$, les éléments de la matrice inverse Δ^{-1} seront notés par $\Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}$, $\alpha, \alpha' = 1, ..., J$.

Au moyen des équations (118) et (110), on écrit

$$\lambda_m \;\approx\; -\{\phi_m, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \;,\; m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J \tag{120}$$

$$0 \;\approx\; \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \quad , \quad \alpha = M+1, ..., J \text{ et } \alpha' = 1, ..., J \tag{121}$$

Rappelons que l'équation d'évolution d'une grandeur $F(q, p)$ est donnée par (103) comme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}, \tag{122}$$

et tenons compte de (120) on a

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_m\} \{\phi_m, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \{\phi_{\alpha'}, H_c\}\,, \text{ avec } \quad m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J \tag{123}$$

mais d'aprés (121) on $\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \{\phi_{\alpha'}, H_c\} \approx 0$ avec $\alpha = M + 1, ..., J$ et par conséquent on peut écrire également

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_\alpha\} \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \{\phi_{\alpha'}, H_c\} \quad \text{avec} \quad \alpha,\ \alpha' = 1, ..., J \tag{124}$$

On définit alors le crochet de Diac de deux observables définies sur l'espacedes phases par

$$\boxed{\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \phi_\alpha\} \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \{\phi_{\alpha'}, g\}} \tag{125}$$

et en particulier

$$\{F, H_c\}_D = \{F, H_c\} - \{F, \phi_\alpha\} \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \{\phi_{\alpha'}, H_c\} \tag{126}$$

L'équation d'évolution se réduit alors à la forme canonique suivante

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D \tag{127}$$

Les conditions de consistance $\{\phi_\alpha, H_T\} \approx 0$ permettent d'écrire

$$\{F, H_T\}_D = \{F, H_T\} - \{F, \phi_\alpha\} \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1} \underbrace{\{\phi_{\alpha'}, H_T\}}_{\approx 0} \tag{128}$$

et on obtient l'égalité canonique suivante

$$\{F, H_T\}_D \approx \{F, H_T\} \approx \dot{F}$$

En particulier, dans le cas spécial où $F = q$ et $F = p$, on obtient les équations de Hamilton (généralisées)

$$\dot{q} \approx \{q, H_T\}_D \,, \dot{p} \approx \{p, H_T\}_D \tag{129}$$

Les crochets de Dirac ont des propriétés similaires à celles de Poisson, en plus de ces deux propriétés

$$\{f, \phi_\alpha\}_D = 0 \qquad (\phi_\alpha \text{ contrainte de deuxième classe}) \tag{130}$$

$$\{f, G\}_D \approx \{f, G\} \qquad (G \text{ fonction de première classe}) \tag{131}$$

où f est une observable définie sur l'espace des phases donc qui dépend de q et p.

L'équation d'évolution d'une grandeur $F\,(q,p)$ est donnée en fonction de ces nouveaux crochets comme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D \tag{132}$$

Les crochets de Dirac ont la simple interprétation que toute l'information concernant un système avec contraintes est incluse dans ces nouveaux crochets de Dirac. Ce sont ces crochets qui permettent une quantification cohérente du système avec contraintes en suivant comme d'habitude la méthode canonique de quantification et en remplaçant le crochet de Poisson par celui de Dirac, comme suit

$$\{F_1(q,\widehat{p), F_2}(q,p)\}_D \to \frac{1}{i\hbar}\left[F_1(\widehat{q},\widehat{p}), F_2(\widehat{q},\widehat{p})\right] \tag{133}$$

C. Application:

Comme application de ces crochets de Dirac, prenons le cas simple de particule (non relativiste), de masse m chargée de charge e, soumise à l'action d'un potentiel scalaire $V(\mathbf{x})$ et un potentiel vectoriel $A(\mathbf{x})$ se déplaçant sur une hypersurface définie par l'équation

$$f(\mathbf{x}) = 0 \tag{134}$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (en particulier $n = 3$ pour une surface). L'application directe de la section précédente montre que la dynamique avec contraintes est générée par l'hamiltonien total suivant

$$H_T = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x})^2}{2m} - \lambda f(\mathbf{x}) + v p_\lambda + V(\mathbf{x}) \tag{135}$$

La procédure de Dirac précédente permet d'établir l'ensemble des contraintes dynamiques suivant ($\mu, \nu = 1, ..., n$ et somme sur les indices répétés et $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nabla}_\mu \mathbf{A}_\nu(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\nabla}_\nu \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x})$)

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= p_\lambda \simeq 0 \\
\phi_2(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \simeq 0 \\
\phi_3(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \{\phi_2(\mathbf{x}), H_T\} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))_\mu \boldsymbol{\nabla}^\mu f(\mathbf{x}) \simeq 0 \\
\phi_4(\mathbf{x},\mathbf{p},\lambda) &= \{\phi_3(\mathbf{x}), H_T\} \\
&= \frac{1}{m^2}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))_\mu (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))_\nu \boldsymbol{\nabla}^\mu \boldsymbol{\nabla}^\nu f(\mathbf{x}) + \frac{1}{m}\boldsymbol{\lambda}\left(\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nabla}^\mu f(\mathbf{x})\right) + \\
&\quad + \frac{1}{m^2}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^\mu \boldsymbol{\nabla}^\nu f(\mathbf{x}) F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) - \frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nabla}^\mu V(\mathbf{x}) \simeq 0
\end{aligned} \tag{136}$$

et le calcul du déterminant $\{\phi_a,\phi_b\}$ avec $a, b = 1, 2, 3, 4$ donne

$$\det\{\phi_a,\phi_b\} = "\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}^\mu f(\mathbf{x})"??? \neq 0 \tag{137}$$

et montre que dans ce cas on a des contraintes de seconde classe.

Il est intéressant de voir comment ce système avec contraintes de seconde classe se quantifie dans le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman. Suivant la méthode de Faddeev-Senjanovic adapté à ce genre de contraintes de seconde classe on écrit le propagateur comme une intégrale fonctionnelle en tenant compte de ces contraintes et des corrections quantiques qui en suivent

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_i; T) \;=\; & \int D\mathbf{x}(t)D\mathbf{p}(t)D\lambda(t)Dp_\lambda(t)\boldsymbol{\delta}(p_\lambda)\boldsymbol{\delta}(f(\mathbf{x}))\boldsymbol{\delta}(\phi_3(\mathbf{x},\mathbf{p}))\boldsymbol{\delta}(\phi_4(\mathbf{x},\mathbf{p},\lambda)) \\ & \sqrt{\mathbf{Det}\{\phi_a,\phi_b\}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T\left(\mathbf{p}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + p_\lambda\frac{d\lambda}{dt} - H_T\right)\right] \end{aligned} \tag{138}$$

où les deltas $\boldsymbol{\delta}(.) = \prod_{t\in[0,T]}\delta(.)$ et $\mathbf{Det}(.) = \prod_{t\in[0,T]}\det(.)$, sont respectivement des deltas de Dirac fonctionnelles et le detérminant fonctionnel. Un calcul fonctionnel direct montre qu'on a le résultat suivant

$$K(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_i; T) = \int D\mathbf{x}(t)\boldsymbol{\delta}(f(\mathbf{x}))\prod_{t\in[0,T]}\sqrt{\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x}(t))\boldsymbol{\nabla}^\mu f(\mathbf{x}(t))}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\Omega(\mathbf{x})\frac{d\mathbf{x}}{dt} + e\mathbf{A}(\mathbf{x})\frac{d\mathbf{x}}{dt} - V(\mathbf{x})\right)\right] \tag{139}$$

avec $\Omega(\mathbf{x})$ la matrice définie par les éléments

$$\Omega_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \delta_{\mu\nu} - V_\mu(\mathbf{x})V_\nu(\mathbf{x}) \text{ avec } V_\mu = \frac{\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x})}{\sqrt{\boldsymbol{\nabla}_\mu f(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}^\mu f(\mathbf{x})}} \tag{140}$$

IV. STRUCTURE SYMPLECTIQUE ET COVARIANCE RELATIVISTE

A. Rappel de relativité

1. Principe de Ralativité

Pour décrire les processus physiques nous aurons besoin d'un système de référence, c'est à dire un système de coordonnées qui indique la position spatiale des particules auquel on a adjoint une horloge pour indiquer le temps. Les systèmes de référence dans lesquels le mouvement des corps non soumis à l'action des forces exterieures, s'effectue avec une vitesse constante sont dits d'inertie ou galiléens. Ces systèmes de référence se déplacent les uns par rapport aux autres avec une translation uniforme.

L'expérience a montré que dans ces systèmes de référence les lois de la nature sont identiques, c'est à dire que les équations traduisant les lois de la nature restent invariantes par rapport à des transformations laissant passer d'un système galiléen à un autre. Ce fait est connu sous "le principe de relativité".

En mécanique classique, l'interaction des particules est décrite au moyen d'une énergie potentielle qui est fonction de leurs coordonnées. L'interaction est alors admise comme instantanée et n'importe quel changement qui apparait sur une particule se répercute instantanemant sur les autres(au même instant). Mais l'expérience montre cependant que la propagation de l'interaction se fait à une vitesse finie dite vitesse de signal.

Le principe de relativité affirme que cette vitesse est indépendante du référentiels d'inertie. C'est une constante universelle, cette constante n'est rien d'autre que *la vitesse de la lumière*

$$c = 2,99792 \times 10^8 m/s \tag{141}$$

La grande valeur de cette vitesse explique le fait que beaucoup de processus physiques se laisse expliqués par la mécanique classique (à faible vitesse). Le principe de relativité auquel on a associé la limitation de propagation des signaux est appelé *principe de relativité d'Einstein.*

La mécanique basée sur le principe de relativité d'Einstein est dite *mécanique relativiste.* Elle concerne les particules se déplaçant à grande vitesse($v \sim c$). La mécanique classique peut être retrouvée en affectant à la vitesse de la lumière une vitesse infini, $c \to \infty$ ou bien $\frac{v}{c} << 1$. En mécanique classique l'espace est relatif et le temps absolu. En relativité d'Einstein cet absolu s'evapore et laisse à sa place un *relativisme global.* C'est l'espace-temps en entier qui est relatif.

2. Intervalle relativiste

Un événement est défini par la donnée de son lieu et son temps. De cette manière il lui correspond 4 coordonnées 3 spatiales et 1 temporelle. On le représente dans un espace à 4 dimension. Dans cet espace quadri dimensionel, un événement est representé par un point dit *point d'univers*. L'évolution est décrite au moyen d'une ligne dans cet espace(4-dim) dite *ligne d'univers,* c'est l'ensemble des coordonnées spatiales à tout instant. Une particule en mouvement rectiligne et uniforme a pour ligne d'univers une droite dans cet espace.

Dans un référentiel R, soit l'emission d'un signal d'un point (x_1, y_1, z_1) à l'instant t_1 et la réception en un point (x_2, y_2, z_2) à l'instant t_2. La distance parcourue est

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=c\,(t_2-t_1)\,,\text{ ou bien autrement:} \tag{142}$$
$$c^2\,(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0$$

Dans un autre référentiel $\acute{R}$ ces deux événements sont décrit par $\left(\acute{x}_1,\acute{y}_1,\acute{z}_1\right)$ à l'instant $\acute{t}_1$ et $\left(\acute{x}_2,\acute{y}_2,\acute{z}_2\right)$ à l'instant $\acute{t}_2$. Comme la vitesse du signal (vitesse de la lumière) est la même dans R et $\acute{R}$, on a aussi:

$$c^2\left(\acute{t}_2-\acute{t}_1\right)^2-\left(\acute{x}_2-\acute{x}_1\right)^2-\left(\acute{y}_2-\acute{y}_1\right)^2-\left(\acute{z}_2-\acute{z}_1\right)^2=0. \tag{143}$$

Par conséquent, un événement par (t,x,y,z) et un intervalle entre deux événement par

$$s_{12}=\sqrt{c^2\,(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \tag{144}$$

donc si $s_{12}=0$ dans R alors $s_{12}^{'}=0$ dans $\acute{R}$(invariance de la vitesse de lumière). Pour deux événements infiniments voisins on a $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$. On peut alors préconiser que $ds^2=ads^{'2}$, a est un coefficient qui dependra en genéral de la vitesse relative des deux référentiels. Une comparaison de 3 référentiels $R,R^{'},R^{''}$donne $a=1$ d'où:

$$ds^2=ds^{'2}\text{ ou bien }s=s^{'} \tag{145}$$

L'intervalle entre deux événements est un invariant de la transformation d'un référentiel à un autre. Soit deux événements (t_1,x_1,y_1,z_1) et (t_2,x_2,y_2,z_2) dans R, on demande s'il existe un référentiel $R^{'}$ tel que ces deux événements coincident dans l'espace c'est à dire $x_1^{'}=x_2^{'},y_1^{'}=y_2^{'},z_1^{'}=z_2^{'}$,pour cela nous écrirons: $s_{12}^2=s_{12}^{'2}=c^2(t_2^{'}-t_1^{'})>0$, comme l'intervalle est invariant on a $s_{12}^2>0$, on dit que l'intervalle est du genre temps. Soient deux événements relatifs à un même corps, leur intervalle est toujours du genre temps, puisque la vitesse du corps est toujours inférieur à c $(v<c)$ et on a: $s_{12}^2>0$. Si on demande un référentiel où les événements sont simultanés on aura $t_2^{'}-t_1^{'}=0$ et $s_{12}^2=s_{12}^{'2}=-\left(\acute{x}_2-\acute{x}_1\right)^2-\left(\acute{y}_2-\acute{y}_1\right)^2-\left(\acute{z}_2-\acute{z}_1\right)^2<0$ et comme l'intervalle est invaraint $s_{12}^2<0$, on dit que l'intervalle est du genre espace. Deux événements dont l'intervalle du genre temps sont toujours séparés dans le temps(pas de simultanéité) et en plus (st) conseve le signe. Deux événements dont l'intervalle est du genre espace sont toujours séparés dans l'espace(pas de coincidence).

L'intervalle est dit du genre lumière si $s_{12}^2 = 0$.De cette manière, si on choisit un origine O pour notre système de coordonnées (t, x, y, z) on obtiendra pour $s_{12}^2 = 0$ on a un cône dit cône de lumière.

Temps propre: Soient donnés un référentiel R et une horloge en mouvement arbitraire dans R. Attachons à cette horloge un système de coordonnées, on peut considerer que le mouvement de l'horloge est à chaque instant uniforme (mais varié sur une durée appréciable). Envertu de l'invariance on a:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \text{ dans } R \\ &= c^2dt_0^2 \text{ dans } R_0 \text{ référentiel au repos de l'horloge.} \end{aligned} \tag{146}$$

$dt_0 = 1/c\ ds = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, entre deux instants t_1 et t_2 de R on a:

$$t_{02} - t_{01} = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{147}$$

Si le référentiel R_0 est attaché à un corps, ce temps s'appelle temps propre. Et on a: le temps propre est toujours plus court que le temps correspondant dans le référentiel où elle est en mouvement.

Transformation de Lorentz

En mécanique classique on sait que la transformation qui nous fait passer d'un référentiel R à un autre R'si on se restreint au deplacement le long de x est donnée par:

$$x' = x - v_0t \ ,y' = y, z' = z \text{ , avec } t = t' \text{ et } v_0 \text{ vitesse de } R'/R. \tag{148}$$

Elle s'appelle transformation de *Galilée.* C'est une transformation qui ne satisfait les principes de relativité (classique). Pour modifier ces transformations imposons à la transformation de conserver l'intervalle s^2.

$$s^2 = s'^2 \text{ou bien } c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{149}$$

Comme $y = y'$ et $z = z'$(translation des repères le long de l'axe x), alors on aura:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2. \tag{150}$$

La transformation qui laisse invariant cet intervalle relativiste est donnée par

$$t^{'}=\frac{t-\left(v_0/c^2\right)x}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},x^{'}=\frac{x-v_0t}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},y^{'}=y,z^{'}=z \tag{151}$$

Elle est dite transformation de Lorentz. Les formules inverses ($R^{'}\to R$) s'obtiennent en inversant $v_0\to -v_0$.

Transformation des vitesses:

Soit une particule en mouvement dans deux référentiels R et $R^{'}$, sa vitesse dans R est $\mathbf{v}=(dx/dt,dy/dt,dz/dt)$ et dans $R^{'}$est $\mathbf{v}^{'}=\left(dx^{'}/dt,dy^{'}/dt,dz^{'}/dt\right)$, d'aprés la transformation de Lorentz:

$$dt^{'}=\frac{t-\left(v_0/c^2\right)dx}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},dx^{'}=\frac{dx-v_0dt}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},dy^{'}=dy,dz^{'}=dz \tag{152}$$

Alors on obtient:

$$v_x^{'}=\frac{v_x-v_0}{1-v_xv_0/c^2},v_y^{'}=\frac{v_y\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1-v_xv_0/c^2},v_z^{'}=\frac{v_z\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1-v_xv_0/c^2} \tag{153}$$

avec v_0 vitesse de $R^{'}/R$.

V. MÉCANIQUE RELATIVISTE

Pour étudier la dynamique d'une particule relativiste nous partons du principe de moindre action. Le problème est comment définir l'intégrale d'action? Donnons une réponse dans le cas de la particule libre puis généralisons le raisonnement au cas de l'interaction.

Pour décrire la dynamique au moyen d'une loi qui soit indépendante du référentiel, c'est à dire, d'une loi covaraiante, il faudra au premier d'abord définir une action covariante. Donc un scalaire qui soit invariant par transformation de Lorentz. En plus le scalaire sous le signe d'intégration doit être une diff"rentielle du premier ordre. Nous avons déjà vu que ce scalaire n'est rien d'autre que l'intervalle relativivste infinitesimale $ds=\sqrt{c^2dt^2-d\mathbf{x}^2}=cdt\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$. En fait pour des raisons d'homogénisation des unités multiplions cet invariant par une constante $-\alpha$ de sorte que:

$$S=-\alpha\int_a^b ds=-\alpha c\int_{t_a}^{t_b}dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2} \tag{154}$$

c'est à dire que le Lagrangien est $L = -\alpha c\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$. La validité de ce choix se justifie en prenant la limite non relativiste $c \to \infty$, $L \to L_{classique}$. En effet $L \simeq -\alpha c + \alpha \mathbf{v}^2/2c$, fixons $\alpha = mc$, $-\alpha c = -mc^2$, est une dérivée totale qui n'influence pas la dynamique. Par conséquent, l'action d'une particule libre est $S = -mc\int_a^b ds$ et la fonction de Lagrange $L = -mc^2\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$.

Le choix d'un lagrangien n'est pas unique et dans ce cas relativiste il peut aussi être choisi comme (voi application)

$$L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}) = -\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}, \ \tau \text{ un invariant relativiste} \tag{155}$$

A. Energie et impulsion

L'impulsion d'une particule est:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{156}$$

pour $c \to \infty$, $\vec{p} = m\vec{v}$ et pour $v \simeq c$, $p \simeq \infty$. La dérivée de $\vec{p}$ par rapport au temps c'est la force qui agit sur la particule

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{md\mathbf{v}/dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v}\left(\mathbf{v}.d\mathbf{v}/dt\right)/c^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} \tag{157}$$

On appelle énergie de la particule:

$$\xi = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{158}$$

si $c \to \infty$, $\xi = mc^2 + mv^2/2$, pour $\mathbf{v} = 0$ particule au repos $\xi = mc^2$ c'est l'énergie au repos de la particule. En fait, ces formules restent valables dans le cas d'un corps constitué d'un grand nombre de particules puisque le caractère élémentaire n'intervient nulle part.

Elévons au carré chacune des formules précédentés, on obtient: $\xi^2/c^2 = \mathbf{p}^2 + m^2c^2$. Par conséquent la relation entre l'énergie et l'impulsion est la fonction d'Hamilton

$$H = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}, \text{ pour } c \to \infty \text{ , } H \simeq mc^2 + \mathbf{p}^2/2m \tag{159}$$

On peut aussi écrire: $\mathbf{p} = \xi\mathbf{v}/c^2$, pour $v = c$ on a $p \sim \infty$ et $\xi \sim \infty$ c'est à dire impossible à une particule de masse m de se mouvoir à une vitesse c. Pour une particule de masse nulle (photon) se déplaçant à la vitesse de la lumière on a: $p = \xi/c$.

B. Formalisme quadri-dimensionnel

On sait qu'un événement esr repéré par 4 coordonnées, on dit aussi que c'est un point dans un espace à 4 dim. En plus la "somme" des carré: l'intervalle relativiste $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ne change pas lors de rotation dans cet espace à 4 dim. C'est ce qu'àn appelle transformation de Lorentz. Pour pouvoir juger de la covariance du formalisme, c'est à dire de son indépendance des référentiels, il est préférable d'unifier ces 4 composantes et d'utuliser un formalisme à 4 dim, dit formalisme covariant.

Ainsi l'événement est un 4- position $(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ qu'àn note x^μ $\mu = 0, 1, 2, 3,$ qui se transforme dans une transformation de Lorentzcomme (V vitesse de $R^{'}/R$)

$$x^{'0} = \frac{x^0 - (V/c)\, x^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, x^{'1} = \frac{x^1 - (V/c)\, x^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, x^{'2} = x^2, x^{'3} = x^3 \tag{160}$$

Nous géneralisons cette écriture pour n'importe quel vecteur de l'espace à 4 dim et on dit que c'est un quadrivecteur qui se transforme comme quadri-position, $A^\mu \equiv \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$ avec:

$$A^{'0} = \frac{A^0 - (V/c)\, A^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, A^{'1} = \frac{A^1 - (V/c)\, A^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, A^{'2} = A^2, A^{'3} = A^3 \tag{161}$$

on écrit aussi $A^{'\mu} = \sum\limits_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu\ A^\nu$ où Λ^μ_ν sont les élements de matrice de

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{162}$$

La forme de l'intervalle relativiste inspire à l'écriture d'un produit scalaire des vecteurs comme

$$A.B = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \text{ où } g_{\mu\nu} \text{ est le tenseur métrique } g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{163}$$

on peut définir $B_\mu = \sum\limits_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} B^\nu$ et réecrire $A.B = \sum\limits_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$.

Les quadrivecteurs ont des composantes dites contravariantes notées A^μ. On appelle composantes covariantes d'un quadrivecteur les $A_\mu = \sum\limits_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} A^\nu$.

Convention: Remarquons que les sommes $\sum$ sont encombrantes et de ce fait on utulise la convention d'Einstein qui consiste en:

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} B_{\mu} \equiv A^{\mu} B_{\mu} \tag{164}$$

Une somme sur un indice repeté est éliminée de l'écriture sauf indication. Par conséquent dans un cadre plus général de transformation on a: La transformation d'un quadrivecteur

$$A^{'\mu} = \Lambda^{\mu}\nu A^{\nu} \tag{165}$$

Produit scalaire: $A.B = A^{\mu} g_{\mu\nu} B^{\nu} = A^{\mu} B_{\mu}$.

A^0 est dite composante temporelle, A^i $i = 1, 2, 3$ composante spatiale.

$A^2 = A^u A_{\mu} = \left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2$, $A^2 > 0$ du genre temps, $A^2 < 0$ du genre espace, $A^2 = 0$ du genre lumière (isotrope).

Ainsi on définit la quadrivitesse:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}, \;\; \mu = 0, 1, 2, 3, u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{v^i/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{166}$$

où $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$. Il est facile de verifier que $u^2 = u^{\mu} u_{\mu} = 1$ c'est un 4-vecteur unité.

La quadriaccéleration se définit de la même manière:

$$\frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2}, \text{ puisque } u^2 = 1, \text{ il vient que } \frac{du^{\mu}}{ds} u_{\mu} = 0, \tag{167}$$

la 4-accéleration est orthogonale à la 4-vitesse. L'équation de mouvement est déduite comme auparavant par un <u>Calcul de la variation de l'action:</u>

$$\begin{aligned}
&S = -mc \int_a^b ds = -mc \int_a^b \sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}} \\
&\delta S = -mc\delta \left(\int_a^b \sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}} \right) = -mc \int_a^b \frac{dx^{\mu} \delta \left(dx_{\mu}\right)}{\sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}}} = -mc \int_a^b u^{\mu} d\left(\delta x_{\mu}\right), \\
&\delta S = -mcu^{\mu} \delta x_{\mu} \mid_a^b + mc \int_a^b \delta x_{\mu} \frac{du^{\mu}}{ds} ds. \; \delta x_{\mu}\left(a\right) = \delta x_{\mu}\left(b\right) \text{ et } \delta S = 0 \text{ donne } \frac{du^{\mu}}{ds} = 0,
\end{aligned} \tag{168}$$

La 4-vitesse de la particule est constante.

C. Retour à l'impulsion-énergie

On sait d'aprés la mécanique classique que les quantités physiques telles l'impulsion et l'énergie peuvent être reliées à l'action. Pour ce faire on fait varier par exemple l'action en ne fixant que le point initial ce qui donne

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \mid_{t_a}^{t_b} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt, \text{ avec } \delta q(t_a) = 0 = \delta q(t_b) \tag{169}$$

sur la trajectoire physique on aura ($\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$):

$$\delta S = p \delta q \text{ d'où on tire } p = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{170}$$

Pour l'énergie on procéde de la manière suivante: on sait que $\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q}$ d'où on tire $\frac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot{q} = -H = -E$ c'est à dire $E = -\frac{\partial S}{\partial t} = H$, de cette manière on écrit

$$dS = pdq - Hdt \text{ (on sous entend ici variation à l'extrémité supérieure)} \tag{171}$$

En mécanique relativiste ces deux résultats sont réunis dans une même écriture 4-dim. Si on ne fixe pas l'extrémité supérieure, il vient

$$\delta S = -mcu^{\lambda} \delta x_{\lambda} \text{ d'où on tire: } -\frac{\partial S}{\partial x_{\lambda}} = mcu^{\lambda} = p^{\lambda} \tag{172}$$

Le 4- vecteur p^{λ} s'appelle la 4-impulsion ou le vecteur impulsion-énergie puisque effectivement on a, les composante temporelle et spatiales

$$P^0 = \xi / c \ \equiv \ \text{énergie;} P^i = p^i \ \ \text{(i=1,2,3)} \ \equiv \ \text{impulsions.} \tag{173}$$

Ce 4-vecteur p^{λ} se transforme comme

$$p^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu} \tag{174}$$

En résumé:

Les lois de la physique sont invariants par la transformation de Lorentz :$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ laissant invariant l'intervalle relativiste $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$ pseudo-métrique de l'espace linéaire dit espace de

Minkovski (espace-temps de la relativité d'Einstein). Ces transformations vérifient $\Lambda^{\mu}_{\lambda}\, g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} = g_{\lambda\rho}$; d'où on tire qu'on 4 parties disconnectes en ses paamètres scindées par: $\det(\Lambda) = \pm 1$ et $\left|\Lambda^0_0\right| \geq 1$.Ces transformations forment un groupe dit groupe de Lorentz s'identifiant avec le groupe de Lie

$$L = O(1,3) = \left\{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R})/\Lambda^T g \Lambda = g\right\} \tag{175}$$

d'algèbre de Lie

$$o(1,3) = \left\{a \in M(4,\mathbb{R})/a^T = -gag\right\} \tag{176}$$

Les transformations avec $\det(\Lambda) = +1$ forment un sous groupe de L (dit groupe propre de Lorentz noté L_+) s'identifiant avec le groupe de Lie

$$L_+ = SO(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3)/\det(\Lambda) = +1\} \tag{177}$$

Les transformations avec $\det(\Lambda) = -1$ ne forment pas un sous groupe de L et sont dites transformations impropres de Lorentz notées L_-.

L contient un sous groupe dit groupe de Lorentz orthochrone noté $L^{\uparrow}$ défini par

$$L^{\uparrow} = \left\{\Lambda \in O(1,3)/\Lambda^0_0 \geq 1\right\} \tag{178}$$

L'autre partie des transformations avec $\Lambda^0_0 \leq -1$, notée $L^{\downarrow}$, ne forme pas un sous groupe de L dite transformations de Lorentz non-orthochrone.

L'intersection $L^{\uparrow}_+ = L^{\uparrow} \cap L_+$ Ce sous groupe est dit le groupe de Lorentz propre et orthochrone

$$L^{\uparrow}_+ = \left\{\Lambda \in O(1,3)/\det(\Lambda) = +1, \Lambda^0_0 \geq 1\right\} \tag{179}$$

Suivant ces transformations de Lorentz les vecteurs et les tenseurs se transforment comme

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu} \tag{180}$$

$$T'^{\{\mu\nu\ldots\lambda\}} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \ldots \Lambda^{\lambda}_{\lambda'} T^{\{\mu'\nu'\ldots\lambda'\}} \tag{181}$$

La théorie du champ de Maxwell est invariante par ce groupe de Lorentz.

Comme les translations, son groupe noté $\mathcal{T}$, laissent aussi invariant l'intervalle relativiste alors on peut constituer un groupe incluant le groupe de Lorentz comme sous groupe, c'est le groupe de Poincaré (noté $\mathcal{P}$) qui est composé comme produit semi-direct de ce groupe des translations et du groupe de Lorentz $\mathcal{P} = \mathcal{T} \rtimes L$.

Tenant compte de cette invariance relativiste, nous définissons une action relativiste à partir d'un lagrangien invariant relativiste comme suit. On choisit un paramètre d'évolution qui soit un invariant relativiste s (par exemple le temps propre ou une fonction de ce temps propre) et construisons un lagrangien $L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds})$. Formellement, nous écrirons l'action

$$S\left[x^\mu\right] = \int_{s_1}^{s_2} ds L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}) \tag{182}$$

et comme d'habitude le problème variationnel donnera les équations de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\right) = 0,\ \ \mu = 0,1,2,3 \tag{183}$$

Dans ce cas relativiste, l'mpulsion sera définie comme $p_\mu = -\frac{\partial L}{\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}$ (remarquons le signe $-$ pour le choix de la métrique $(+,-,-,-)$) et l'hamiltonien par

$$H = -p_\mu\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) - L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}) \tag{184}$$

Les équations d'Hamilton s'obtienent comme

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu}, \frac{dx_\mu}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} \tag{185}$$

Ces équations permettent de déduire l'évolution d'une fonction quelconque de (x,p) et de définir un crochet de Poisson

$$\frac{dF(x,p)}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\frac{\partial H}{\partial x^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \{F,H\} \tag{186}$$

D. Application:

Considérons le cas d'une particule relativiste de masse m et de charge e dont l'action est

$$S\left[x\right] = \int_0^\lambda ds(L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}) - \frac{m^2}{2}) \tag{187}$$

où λ est un paramétre invariant. Sa dynamique est décrite par le lagrangien

$$L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}) = -\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - eA_\mu(x)x^\mu \tag{188}$$

L'équation de Lagrange est

$$\ddot{x}_\mu = e(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\dot{x}^\nu \tag{189}$$

Son hamiltonien est $(p_\mu = -\frac{\partial L}{\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)})$

$$H = -\frac{1}{2}(p^\mu - eA^\mu(x))(p_\mu - eA_\mu(x)) \tag{190}$$

Dans cette application, choisisons un champ particulier dit champ d'une onde plane donné par

$$A^\mu(x) = A^\mu(k^\nu x_\nu), \text{ tel que } k^\nu k_\nu = 0 \text{ et } k^\nu A_\nu(kx) = 0 \tag{191}$$

et appliquons une transformation canonique type F_2

$$(x,p) \longrightarrow_{F_2} (Q,P) \quad F_2 = F_2(x, P\,, s) \tag{192}$$

telle que le nouveau hamiltonien H' soit égal à zéro. Les générateurs de cette transformation sont les solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$H' = H(x, -\frac{\partial F_2}{\partial x}, s) + \frac{\partial F_2}{\partial s} = 0 \tag{193}$$

dont la solution dans ce cas d'interaction est donnée par

$$F_2(x, P\,, s) = -(Px) - \frac{1}{(Pk)}\int^{kx} d\phi \left[e(PA(\phi)) - \frac{e^2A^2(\phi)}{2}\right] + \frac{P^2}{2}s \tag{194}$$

La relation entre les anciennes et les nouvelles variables de l'espace des phases se déduit facilement comme

$$p_\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial x^\mu} = P_\mu - \frac{k_\mu}{(Pk)}\left[e(PA(\phi)) - \frac{e^2A^2(\phi)}{2}\right] \tag{195}$$

$$Q_\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial P^\mu} = x_\mu - P_\mu s + \frac{1}{(Pk)}\int^{kx} d\phi e A_\mu(\phi) - \frac{k_\mu}{(Pk)}\int^{kx} d\phi \left[e(PA(\phi)) - \frac{e^2A^2(\phi)}{2}\right] \tag{196}$$

Cette solution est utilisée dans le cadre quantique pour retrouver l'expression du propagateur relativiste de cette particule. En effet, on montre que dans l'approximation semi-classique ce propagateur est donné par

$$K_{sc}(x_b, x_a; \lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[i(F_2(x_b, P\,, \lambda) - F_2(x_a, P\,, 0)\right] \tag{197}$$

avec P une constante de mouvement et p donné par

VI. STRUCTURE SYMPLECTIQUE ET LE SPIN

Pour décrire le spin d'une particule telle que l'électron, on a besoin au niveau quantique d'introduire les matrices de Pauli, ou celles de Dirac (cas relativiste), décrivant les observables et pour décrire les états on leur associe les spineurs, ou bien bi-spineurs(cas relativiste). Nous n'allons pas rappeler ici ces notions géométriques relatifs à la théorie du spin au niveau quantique mais plutôt introuduire une algébre très célébre en mathématiques, celle de Grassmann, qui permet une description classique du spin et introduire en conséquence la structure symplectique qu'elle induit.

La propriété essentielle est celle de l'anti-commutation. Comme l'espace des phases (habituel) de la mécanique est décrit par des variables commutantes (c-nombres) notées $\left(q_i, p^i\right)_{i=1,..,n}$, nous introduisons en parallèle des variables anti-commutantes de configuation $(\theta_\alpha)_{\alpha=1,..,N}$ et leurs conjuguées $(\pi^\alpha)_{\alpha=1,..,N}$; ce qu'on appellera espace des phases pseudo-classique.

Ces variables de Grassmann $(\theta_\alpha)_{\alpha=1,..,N}$ vérifient (sommation sous entendue)

$$[\theta_\alpha, \theta_\beta]_+ \equiv \theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0, \delta f(\theta) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\theta_\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta_\alpha} = \delta\theta_\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta_\alpha} \tag{198}$$

Décrivons un système pseudo-classique par l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha) \tag{199}$$

$L(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta_\alpha})$ est le lagrangien pseudo-classique dont la variation est (sommation sous entendue)

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta_\alpha}) = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta\dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_\alpha}} \tag{200}$$

Définissons comme d'habitude

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ et } \pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \tag{201}$$

Il est à noter que le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha)$ est une fonction paire des variables de Grassmann, ie,

$$[L, \theta_\alpha] = 0 = \left[L, \dot{\theta}_\alpha\right] \tag{202}$$

de sorte que

$$\left[\pi^\beta, \theta_\alpha\right]_+ = 0 = \left[\pi^\beta, \dot{\theta}_\alpha\right]_+ \tag{203}$$

Le problème variationnel

$$\delta_{q,\theta} S = 0, \quad \delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2), \delta\theta(t_1) = 0 = \delta\theta(t_2) \tag{204}$$

donne les équations de Lagrange correspendantes suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) &= 0, \ i = 1, .., n \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}\right) &= 0, \ \alpha = 1, .., N \end{aligned} \tag{205}$$

L'hamiltonien est défini par

$$H(q_i, p^i, \theta_\alpha, \pi^\alpha) = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - L \tag{206}$$

et suivant (203205) la variation de H est donnée par

$$\delta H = -\delta q_i \dot{p}^i + \delta p^i \dot{q}_i - \delta\theta_\alpha \dot{\pi}^\alpha - \delta\pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha \tag{207}$$

Les équations d'Hamilton sont alors données par

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,..,n \tag{208}$$

$$\dot{\theta}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}, \dot{\pi^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}, \quad i = 1,..,N \tag{209}$$

Ces équations permettent de définir des crochets de Poisson pour ce système pseudo-classique sachant que pour une observable F vivant dans cet espace des phases élargi décrit par $(q_i, p^i, \theta_\alpha, \pi^\alpha)$ on peut écrire

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{210}$$

On définit alors le crochet de Poisson par

$$\{A, B\} = \left(\frac{\partial B}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{211}$$

de sorte que l'évolution de cette observable est donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \tag{212}$$

Comme L est fonction paire des variables de Grassmann $L(\theta_\alpha, \dot{\theta_\alpha})$ alors H aussi est fonction paire des $(\theta_\alpha, \pi^\alpha)$. Il serait préférable d'introduire deux types de variables de Grassmann pour les observables les paires (even, E_k) et les impaires (odd,O_l) vérifiant

$$[E_k, E_{k'}] = 0 = [E_k, O_l] \ \text{(commutateur)} \tag{213}$$

$$[O_l, O_{l'}]_+ = 0 \ \text{(anticommutateur)} \tag{214}$$

Une simple analyse du crochet de Poisson (212) tenant compte de ces propriétés de commutation et d'anticommutation montre qu'on a les cas suivants

Pour des observables paire-paire

$$\{E_1, E_2\} = \left(\frac{\partial E_1}{\partial q_i}\frac{\partial E_2}{\partial p^i} - \frac{\partial E_2}{\partial q_i}\frac{\partial E_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial E_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{215}$$

Ce crochet est celui de la mécanique habituelle est alors il vérifie les mêmes propriétés anti-symétrie, propriété de Leibnitz et l'identité de Jacobi.

Pour des observables impaire-paire ou paire-impaire

$$\{O, E\} = \left(\frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i} - \frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{216}$$

$$\{E,O\} = \left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i} - \frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{217}$$

On a l'antisymétrie

$$\{O,E\} = -\{E,O\} \tag{218}$$

et la propriété de dérivée suivante

$$\begin{aligned} \{E_1E_2,O\} &= E_1\{E_2,O\} + \{E_1,O\}E_2 \\ \{E,O_1O_2\} &= O_1\{E,O_2\} + \{E,O_1\}O_2 \\ \{E_1,OE_2\} &= O\{E_1,E_2\} + \{E_1,O\}E_2 \end{aligned} \tag{219}$$

et bien sûr l'identité de Jacobi.

Pour des observables impaire-paire ou paire-impaire

$$\{O_1,O_2\} = \left(\frac{\partial O_1}{\partial q_i}\frac{\partial O_2}{\partial p^i} + \frac{\partial O_2}{\partial q_i}\frac{\partial O_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial O_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{220}$$

Ce crochet est symérique

$$\{O_1,O_2\} = \{O_2,O_1\} \tag{221}$$

et modifie avec elle la propriété de dérivée

$$\{O_1O_2,O_3\} = O_1\{O_2,O\} - \{O_1,O_3\}O_2 \tag{222}$$

$$\{EO_1,O_2\} = E\{O_1,O_2\} - \{E,O_1\}O_2 \tag{223}$$

et on a l'identité de Jacobi pour les observables impaires

$$\circlearrowleft_{1,2,3}\{O_1\{O_2,O_3\}\} = 0 \tag{224}$$

et un changement de signes adéquat pour le mélange.

Pour une mécanique pseudo-classique (non relativiste), nous choisirons l'action (dite aussi supersymétrique) suivante

$$S[q(t),\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\dot{q}_i^2 + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{i}{2}\theta_\alpha\dot{\theta}_\alpha - V(q_i,\theta_\alpha)\right) \tag{225}$$

avec $V(q_i,\theta_\alpha)$ une observable paire. Cette action pseudo-classique fait surgir un ensemble de contraintes donné par

$$\varphi_\alpha = \pi^\alpha + \frac{i}{2}\theta_\alpha = 0 \tag{226}$$

Le crochet de Poisson (supersymétrique) de ces contraintes se calcule facilement

$$\left\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\right\} = -i\delta_{\alpha\beta} \tag{227}$$

et il est non nul par conséquent les contraintes sont de seconde classe et le crochet de Dirac donne alors

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}_D = -i\delta_{\alpha\beta} \tag{228}$$

Pour une particle de masse m et de spin 1/2, des considérations de symétrie (le groupe des transformations des Grassmann G_N est $O(N)$) permettent de proposer l'action suivante

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{i}{2}\theta_\alpha\dot{\theta}_\alpha - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{i}{2}\theta_\alpha\theta_\beta V_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \right) \tag{229}$$

La quantification de Dirac donne

$$i\widehat{\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}}_D = \left[\hat{\theta}_\alpha, \hat{\theta}_\beta\right]_+ = \delta_{\alpha\beta} \tag{230}$$

est permet l'identification des $\hat{\theta}_\alpha$ avec les matrices de Pauli.

Il est intéressant de remarquer que cette action pseudo-classique peut être obtenue à partir des considérations quantiques dans le cadre des intégrales de chemin de Feynman d'une manière plus naturelle. L'astuce consiste à relier l'opérateur qui ordonne ces matrices de Pauli (dit opérateur de Dyson) aux variables de Grassmann au cours de l'évolution quantique. En effet, au cours de l'évolution quantique décrite par l'opérateur d'évolution on a sur ces matrices de Pauli l'ordre suivant

$$T\exp\left\{ i\int_0^\lambda ds \left(-iF_{nk}(x(s), p(s))\sigma^n(s)\sigma^k(s) \right) \right\} \tag{231}$$

L'opérateur T-produit T, d'ordre sur le temps s, ordonne les matrices σ^n qui formellement dépendent de ce paramètre s. Au moyen de la technique des sources, on écrit cette dernière comme

$$\exp\left\{ i\int_0^\lambda ds \left(F_{nk}(x(s), p(s)) \frac{\delta_l}{\delta\rho^n} \frac{\delta_l}{\delta\rho^k} \right) \right\} T\exp\left(\textstyle\int_0^1 \rho_n\left(s\right)\sigma^n ds \right)\Big|_{\rho=0} \tag{232}$$

où les sources $\rho_n\left(s\right)$ sont des variables de Grassmann anti-commutant avec les matrices σ^n. A ce niveau, l'expression $T\exp\left(\int_0^1 \rho_n\left(s\right)\sigma^n ds\right)$ peut être représentée par une intégrale de chemin sur des variables de Grassmann suivant l'égalité

$$T\exp\left(\textstyle\int_0^\lambda ds\rho_n\left(s\right)\sigma^n \right) =$$

$$= \exp\left(i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \int_{\psi^n(0)+\psi^n(\lambda)=\xi^n} \mathcal{D}\psi \exp\left\{\int_0^\lambda ds \left[\psi_n \dot{\psi}^n - 2i\rho_n \psi^n\right] + \psi_n(1)\psi^n(0)\right\}_{\xi=0} \quad (233)$$

avec $\mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(\lambda)=0} D\psi \exp\left(\int_0^\lambda ds \left(\psi_n \dot{\psi}^n\right)\right)\right]^{-1}$ où la condition aux bords des ces chemins Grassmaniens $\psi^n(0) + \psi^n(1) = \xi^n \mid_{\xi=0}$ reflète la nature fermionic des matrices de Pauli σ^nsatisfaisant des relations d'anti-commutation. Comme l'intégrale de chemin de Feynman estintimement reliée à la nature classique du système, on voit bien apparaitre une action pseudo-classique, linéaire en $\dot{\psi}^n$ qui indique que $\psi^n(0), \psi^n(1)$ ne sont pas indépendants et sont alors reliés par cette condition d'anti-périodicité.

Une justification de cette égalité utilise la formule de Wick. En effet, comme il est bien connu que le théorème de Wick est le mieux adapté pour gérer ce T-product T en termes d'ordre sur les opérateurs qui ont des commutateurs ou anti-commutateurs des c-nombres (dans notre cas $\sigma^n(s)$). Nous avons

$$T(\sigma^n(s)\sigma^k(s')) = Sym\left[\sigma^n(s)\sigma^k(s')\right] + \frac{1}{2}\left[\sigma^n(s), \sigma^k(s')\right]_+ = Sym\left[\sigma^n(s)\sigma^k(s')\right] + \delta_{nk}\epsilon(s-s') \quad (234)$$

où $Sym\left[\sigma^n(s)\sigma^k(s')\right] = \frac{1}{2}\left[\sigma^n(s), \sigma^k(s')\right]_-$et $\epsilon(s-s') = \begin{cases} 1 \text{ for } s > s' \\ -1 \text{ for } s' > s \end{cases}$ cette fonction est anti-symétrique et reflète la nature fermionique des anti-commutateurs en plus de sa propriété anti-périodique suivante. La formule de Wick donne le résultat général suivant

$$\mathcal{T} F[\sigma] = Sym\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 ds \int_0^1 ds' \frac{\delta_l}{\delta\zeta^n(s)} \delta_{nk}\epsilon(s-s') \frac{\delta_l}{\delta\zeta^k(s')}\right] F[\xi] \mid_{\zeta(s)=\sigma(s)} \quad (235)$$

où $F[\sigma]$ est une fonctionnelle quelconque des matrices $\sigma^n(s)$ et $\zeta^n(s)$ sont des variables de Grassmann impaires. Ceci permet d'écrire (231) sous la forme suivante

$$G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) =$$

$$\exp\left(i\sigma^n \tfrac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \int_{\psi^n(0)+\psi^n(1)=\xi^n} \mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int_0^\lambda \left[-i\psi_n \dot{\psi}^n + iF_{nk}(x(s), p(s))\psi^n\psi^k\right] ds + \psi_n(1)\psi^n(0)\right\}_{\xi=0} \quad (236)$$

On déduit alors l'action pseudo-classique suivante

$$S_{pc}[\psi(s)] = \int_0^\lambda \left[-i\psi_n \dot{\psi}^n + iF_{nk}(x(s), p(s))\psi^n\psi^k\right] ds \quad (237)$$

Dans le cas de l'équation de Dirac, cette même recette reste valable en injectant en plus la covariance due à l'invariance relativiste de l'équation. En effet, dans ce cas, la formule qui relie l'ordre des matrices de Dirac à leur nature grassmanienne (ou fermionique) est

$$T\exp\left[i\int_0^\lambda ds\left(-iF_{\mu\nu}(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\right)\right]=\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\delta_l}{\delta\theta^\mu}\right)\int_{\psi(0)+\psi(\lambda)=\theta}\mathcal{D}\psi$$
$$\times\exp\left[i\int_0^\lambda\left(iF_{\mu\nu}(x)\psi^\mu(s)\psi^\nu(s)-i\psi_\mu(s)\dot{\psi}^\mu(s)\right)ds+\psi_\mu(\lambda)\psi^\mu(0)\right], \tag{238}$$

avec

$$\mathcal{D}\psi=D\psi\left[\int_{\psi(0)+\psi(\lambda)=0}D\psi\exp\left(\int_0^\lambda ds\left(\psi_\mu(s)\dot{\psi}^\mu(s)\right)\right)\right]^{-1}, \tag{239}$$

où les $(\psi^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ sont des variables de Grassmann. Ceci permet de définir une action pseudo-classique relativiste, action classique correspondante à l'équation de Dirac, donnée par

$$S\left[x^\mu(s),\psi(s)\right]=\int_0^\lambda ds\left(-\frac{\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}{2}-i\psi_\mu(s)\dot{\psi}^\mu(s)-e\dot{x}_\mu A^\mu(x)+ieF_{\mu\nu}(x)\psi^\mu(s)\psi^\nu(s)-\frac{m^2}{2}\right) \tag{240}$$

sur laquelle on peut définir des crochets de Poisson pseudo-classiques (on dit aussi super-symétriques) et qui par quantification canonique nous redonne l'équation de Dirac en faisant correspondre (avec contraintes) de Dirac donne

$$i\widehat{\{\psi_\mu,\psi^\nu\}}_D=\left[\hat{\psi}_\mu,\hat{\psi}^\nu\right]_+=2\delta_\mu^\nu \tag{241}$$

est permet l'identification des $\hat{\psi}_\mu$ avec les matrices de Dirac.

VII. STRUCTURE SYMPLECTIQUE ET THÉORIE DES CHAMPS

A. Formalisme Lagrangien

Sachant qu'un champ s'étend dans l'espace et le temps, il est préférable d'introduire la notion de densité spatiale et nous écrirons alors l'action d'un système physique "champ" comme

$$S\left[\varphi(x)\right]=\int_{t_1}^{t_2}L(t) \tag{242}$$

où ce lagrangien dépendant du temps est une intégrale étendue à tout l'espace physique du champ

$$L(t)=\int_V d^3x\mathcal{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)) \tag{243}$$

x étant $x^\mu=(ct,\mathbf{x})$ point de l'espace-temps (de la relativité de Gallilée ou d'Einstein) et $\partial_\mu\varphi(x)=\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}$ et $\mathcal{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))$ sa densité lagrangienne.

En physique théorique, les champs sont relativistes; obeissent à la relativité d'Einstein où c est la limite de la propagation des interactions ($c = 1$ par la suite) et de ce fait $x^\mu \in \mathcal{M}$ (espace de Minkowski; voir section de la relativité).

On sait que $d^4x = cdtd^3x$ est un invariant relativiste et nous écrivons alors

$$S\left[\varphi(x)\right] = \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \tag{244}$$

où Ω est le 4-volume étendu dans l'espace-temps du champ $\varphi(x)$.

Nous exigeons que l'action soit un invariant relativiste et par conséquent $\mathcal{L}$ doit satisfaire la même invariance.

Les équations du champ sont donné par la du problème variationnel suivant

$$\begin{aligned} \frac{S\left[\varphi(x)\right]}{\delta\varphi(x)} &= 0, \text{ avec la condition aux limites } \left.\delta\varphi(x)\right|_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{et } \delta(\partial_\mu) &= \partial_\mu(\delta), \ \partial\Omega \text{ étant la frontière de } \Omega \end{aligned} \tag{245}$$

Pour un volume infini on choisira

$$\left.\delta\varphi(x)\right|_{t_1} = 0 = \left.\delta\varphi(x)\right|_{t_2} \text{ et } \ \varphi(x) \to 0 \text{ quand } \mathbf{x} \to \infty \tag{246}$$

L'intégration de cette équation variationnelle donne l'équation de Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi(x)\right)}\right) = 0 \tag{247}$$

Les observables du champ, telles que l'énergie-impulsion, le moment angulaire et les charges, sont obtenues comme invariants des transformations, translation et rotation et symétries internes, imposées à l'action du système via le théorème de Noether qui stipule quand on change l'action par δ

$$\delta : \begin{cases} x \to \widetilde{x} = x + \delta x \\ \varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \end{cases} \tag{248}$$

si l'action reste invariante par ce changement alors on a une charge de Noether conservée, c'est à dire

$$\delta S = 0 \text{ donne } \partial_\mu J^{(\mu)} = 0 \tag{249}$$

$J^{(\mu)}$ est dit courant de Noether et sa charge est

$$Q = \int_V d^3xJ^{(0)} \ \text{ avec } \frac{dQ}{dt} = 0 \tag{250}$$

Dans une translation $x \to \widetilde{x} = x + \delta a$, on obtient

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi(x)\right)} \partial^\nu \varphi(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{251}$$

$T^{\mu\nu}$ est dit tenseur densité impulsion-énergie et il est toujours symétrisable, ie, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. La charge de Noether dans ce cas est l'impulsion-énergie du champ

$$P^\mu = \int_V d^3x T^{0\nu} \ \text{ avec } \frac{dP^\mu}{dt} = 0 \tag{252}$$

Dans une rotation, spatiale ou celle de Lorentz, $x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$, on obtient

$$\partial_\mu J^{\mu,\nu\lambda} = 0, J^{\mu,\nu\lambda} = T^{\mu\nu} x^\lambda - T^{\mu\lambda} x^\nu \tag{253}$$

$J^{\mu,\nu\lambda}$ est dit tenseur densité moment angulaire et la charge de Noether dans ce cas est le moment angulaire du champ

$$J^{\mu\nu} = \int_V d^3x J^{0,\mu\nu} \ \text{ avec } \frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = 0 \tag{254}$$

Dans une transformation interne du champ $\varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi$

$$\delta\varphi = \sum_{s=1}^{r} \delta\alpha_s T^s \varphi \text{ avec } \left[T^s, T^{s'}\right] = T^s, T^{s'} - T^{s'}, T^{s'} = \sum_{s"=1}^{r} C_{s"}^{s,s'} T^{s"} \tag{255}$$

$\{T^s\}_{s=1,2,..?r}$ sont les générateurs d'une algèbre de Lie et $C_{s"}^{s,s'}$ ses constantes de structure. Dans ce changement on a

$$\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}} \left(\delta\alpha_s, \partial_\mu(\delta\alpha_s)\right) \tag{256}$$

En plus de l'invariance de l'action, une condition d'invariance s'impose

$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}} \left(\delta\alpha_s, \partial_\mu(\delta\alpha_s)\right)}{\partial(\delta\alpha_s)} = 0 \tag{257}$$

qui implique l'invariance de Noether suivante

$$\partial_\mu \mathbf{J}_s^\mu = 0, \text{ avec } \mathbf{J}_s^\mu = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}} \left(\delta\alpha_s, \partial_\mu(\delta\alpha_s)\right)}{\partial(\partial_\mu(\delta\alpha_s))} \quad s = 1, 2, .., r \tag{258}$$

et la charge de Noether est la suivante

$$Q_s = \int_V d^3x \mathbf{J}^0, \text{ avec } \frac{dQ_s}{dt} = 0, \quad s = 1, 2, .., r \tag{259}$$

B. Formalisme hamiltonien et crochets de Poisson

Pour passer au formalisme hamiltonien définissons le champ conjugué à $\varphi(t,\mathbf{x})$ par $\pi(t,\mathbf{x})$,

$$\pi(t,\mathbf{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta \partial_0 \varphi(t,\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 \varphi(t,\mathbf{x})\right)}, \text{ à temps égal} \tag{260}$$

Vu que dans cette définition on privilège le temps, on brise l'écriture covariante dans briser l'invariance relativiste de la théorie. La densité hamiltonienne est donnée par la transformée de Legendre

$$\mathcal{H}(\varphi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}))=\pi(t,\mathbf{x})\partial_0\varphi(t,\mathbf{x}) - \mathcal{L}(\varphi(t,\mathbf{x}),\partial_0\varphi(t,\mathbf{x}),.) \tag{261}$$

et l'hamiltonien par

$$H(t) = \int_V d^3x \mathcal{H}(\varphi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x})) \tag{262}$$

et on déduit les équations d'Hamilton du champ

$$\partial_0\varphi(t,\mathbf{x}) \; = \; \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(t,\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{H}(\varphi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}))}{\partial \pi(t,\mathbf{x})} \tag{263}$$

$$\partial_0\pi(t,\mathbf{x}) \; = \; -\frac{\delta H(t)}{\delta \varphi(t,\mathbf{x})} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\varphi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}))}{\partial \varphi(t,\mathbf{x})} \tag{264}$$

Ces équations d'Hamilton s'obtiennent aussi via le principe variationnel suivant (avec les précautions nécessaires)

$$\delta_{\varphi,\pi} S \; = \; 0, \text{ avec la condition aux limites } \; \delta\varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0 = \delta\pi(x)|_{\partial\Omega} \tag{265}$$

$$\text{et } \delta(\partial_\mu) \; = \; \partial_\mu(\delta), \; \partial\Omega \text{ étant la frontière de } \Omega$$

A ce niveau, introduisons les crochets de Poisson (à temps égal). Soient $L_1(t)$ et $L_2(t)$ deux fonctionnelles des champs $(\varphi(x),\pi(x))$ on définit leur crochet de Poisson par

$$\{L_1(t), L_2(t)\} = \int d^3x \left(\frac{\delta L_1(t)}{\delta \pi(t,\mathbf{x})} \frac{\delta L_2(t)}{\delta \varphi(t,\mathbf{x})} - \frac{\delta L_1(t)}{\delta \varphi(t,\mathbf{x})} \frac{\delta L_2(t)}{\delta \pi(t,\mathbf{x})} \right) \tag{266}$$

qui nous donne directement les crochets canoniques (à temps égal)

$$\{\varphi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})\} = 0 = \{\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{y})\}, \{\pi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{267}$$

ainsi que les équations d'Hamilton

$$\partial_0\varphi(t,\mathbf{x}) \; = \; \{H(t),\varphi(t,\mathbf{x})\} = \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(t,\mathbf{x})} \tag{268}$$

$$\partial_0\pi(x) \; = \; \{H(t),\pi(t,\mathbf{x})\} = -\frac{\delta H(t)}{\delta \varphi(t,\mathbf{x})} \tag{269}$$

En théorie quantique des champs, on procède de la même manière en transformant ces relations canoniques (267) en commutateurs comme suit

$$\{\widehat{O_1, O_2}\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{O_1}, \widehat{O_2}\right] \tag{270}$$

ce qui donne

$$\left[\hat{\varphi}_\alpha(t,\mathbf{x}), \hat{\varphi}_\beta(t,\mathbf{y})\right] = 0, \left[\hat{\pi}_\alpha(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_\beta(t,\mathbf{y})\right] = 0, \left[\hat{\varphi}_\alpha(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_\beta(t,\mathbf{y})\right] = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{271}$$

En injectons les solutions du champ on arrive à la notion du champ quantique qui agit sur un espace de particules dit espace de représentation de Fock. Les conditions physiques imposées sur l'état fondamental (état du vide) donnent lieu à deux types de particules dites bosoniques et fermioniques décrites respectivement par des relations de commutation et d'anti-commutation. Pour ces dernières, la nature de la statistique, due au spin, suggère au préalable d'utiliser la pseudo-mécanique pour une naturelle quantification via les crochets de Poisson (voir section spin).

Voyons brièvement la manière de ce faire. L'exemple du champ de Klein-Gordon réel (sans charge) est illustratif. Son lagrangien est

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x),) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi(x)\partial^2\varphi(x) - m^2\varphi^2(x)\right) \tag{272}$$

Le passage à la version hamiltonienne se fait par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) &\rightarrow \mathcal{H}(\varphi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x})) \\ \pi(t,\mathbf{x}) &= \frac{\partial\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))}{\partial_0\varphi(t,\mathbf{x})} \end{aligned} \tag{273}$$

L'équation du champ est

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{274}$$

dont la solution générale est donnée par

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\left(a(\mathbf{k})\exp(-ikx) + a^*(\mathbf{k})\exp(+ikx)\right) \tag{275}$$

$$\pi(t,\mathbf{x}) = (-i)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\left(a(\mathbf{k})\exp(-ikx) - a^*(\mathbf{k})\exp(+ikx)\right) \tag{276}$$

avec $kx = k^\mu x_\mu$, $k^\mu = \left(\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \mathbf{k}\right)$.

La procédure de quantification canonique stipule que $(\varphi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x})) \rightarrow (\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}(t,\mathbf{x}))$ autrement dit $(a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k})) \rightarrow (\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^+(\mathbf{k}))$ et en suivant la recette

$$\{\widehat{O_1, O_2}\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{O_1}, \widehat{O_2}\right] \tag{277}$$

ou bien

$$[\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}),\hat{\varphi}(t,\mathbf{y})]=0,[\hat{\pi}(t,\mathbf{x}),\hat{\pi}(t,\mathbf{y})]=0,[\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}),\hat{\pi}(t,\mathbf{y})]=i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{278}$$

Par conséquent, les relations de commutation sur les $(\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^{+}(\mathbf{k}))$ sont vérifiées

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^{+}(\mathbf{q})\right]=(2\pi)^3\,2\omega_k\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}),[\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}(\mathbf{q})]=0=\left[\hat{a}^{+}(\mathbf{k}),\hat{a}^{+}(\mathbf{q})\right] \tag{279}$$

Dans le cas du champ de Dirac, si on suit la même procédure et adopté ces commutateurs comme résultat de quantification; deux problèmes physiques surgissent. Le premier est que l'état fondamental (le vide) sera instable et le second est la statistique des particules avec spin 1/2 sera violée (voir aussi la discussion précédente motivant l'introduction de la pseudo-mécanique de ces champs). Par ailleurs, juste en raisonnant sur la représentation de l'impulsion en mécanique quantique donnée sous la forme suivante en théorie quantique des champs

$$[P^\mu,\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})]=-i\partial^\mu\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}) \tag{280}$$

on a le choix sur deux possibles solutions en relation avec la régle de Leibniz suivante

$$[AB,C] \;=\; A\,[B,C]+[A,C]\,B,\ \text{commutateur} \tag{281}$$

$$[AB,C] \;=\; A\,[B,C]_{+}-[A,C]_{+}\,B,\ \text{anti-commutateur} \tag{282}$$

Le deuxième choix stabilise le vide quantique et rétablit la nature statistique des particules du champs et en plus en intime relation avec la nature classique donnée par la pseudo-mécanique due au spin.

C. Application:

Voyons ce qui se passe dans le cas du champ de Maxwell. Son lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}(A^\nu(x),\partial_\mu A^\nu(x))=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x),\quad\text{avec } F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x),\ \text{antisymétrique en } \mu,\nu \tag{283}$$

Le principe variationnel donne l'équation du champ

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu(x)\right)=0 \tag{284}$$

Le moment conjugué est

$$\pi_\mu(t,\mathbf{x})=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^\mu(t,\mathbf{x})\right)}=F_{\mu 0}(t,\mathbf{x}) \tag{285}$$

On voit apparaitre déjà une contrainte primaire $\pi_0(t,\mathbf{x}) = 0$ et en plus pour un choix de jauge (jauge de Lorentz) $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ l'équation du champ donne une deuxième contrainte sur $\pi_i(t,\mathbf{x})$; $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\pi} = 0$ et on est bel et bien en présence d'un problème avec contraintes, qui dans ce cas sont de première classe, dues à l'invariance de jauge qui exprime le fait que la propriété physique du champ est la polarisation et elle n'a que deux degrés de liberté. La quantification covariante rajoute un terme de jauge au lagrangien (de fixation de la jauge à $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$) avec un multiplicateur de lagrange

$$\mathcal{L}_\lambda(A^\nu(x), \partial_\mu A^\nu(x)) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu(x)\right)^2 \tag{286}$$

On libère ainsi les contraintes

$$\pi_\mu(t,\mathbf{x}) = F_{\mu 0}(t,\mathbf{x}) - -\lambda g_{\mu 0}\left(\partial_\mu A^\mu(t,\mathbf{x})\right), \mathrm{ie}; \pi_0(t,\mathbf{x}) = -\lambda\left(\partial_\mu A^\mu(t,\mathbf{x})\right), \pi_i(t,\mathbf{x}) = F_{i0}(t,\mathbf{x}) \tag{287}$$

Pour $\lambda = 1$ (jauge de Feynman) on a une équation vectorielle de type Klein-Gordon sur laquelle on impose la quantification canonique habituelle

$$\left[\hat{A}^\mu(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_\nu(t,\mathbf{y})\right] = i\delta^\mu_\nu \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \left[\hat{A}^\mu(t,\mathbf{x}), \hat{A}_\nu(t,\mathbf{y})\right] = 0 = \left[\hat{\pi}^\mu(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_\nu(t,\mathbf{y})\right] \tag{288}$$

Avec ce choix, la solution générale contient des états superflous (à norme négatif dans l'espace de représentation de Fock) et la condition quantique de Gupta-Bleuler

$$\left\langle \partial_\mu A^\mu(t,\mathbf{x})\right\rangle_\psi = 0 \tag{289}$$

les élimine et nous permet de revenir aux états de polarisation physique du photon.

Parallélement, si on considère le problème avec contraintes (ici de première classe) l'ajout des conditions de jauge (fixation de la jauge) $A^0(t,\mathbf{x}) = 0$ et $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0$ (condition de jauge de Coulomb) permet d'avoir les crochets de Dirac suivants

$$\left\{A^i(t,\mathbf{x}), \pi_j(t,\mathbf{y})\right\}_D = \left(\delta^i_j - \frac{\partial_i\partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \left\{A^i(t,\mathbf{x}), A^j(t,\mathbf{y})\right\}_D = 0 = \left\{\pi_i(t,\mathbf{x}), \pi_j(t,\mathbf{y})\right\}_D \tag{290}$$

qui par quantification canonique

$$\widehat{\{O_1, O_2\}}_D \to \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{O_1}, \widehat{O_2}\right] \tag{291}$$

donne le résultat équivalent en termes physique

$$\left[\hat{A}^i(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_j(t,\mathbf{y})\right] = i\left(\delta^i_j - \frac{\partial_i\partial_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \left[\hat{A}^i(t,\mathbf{x}), \hat{A}^j(t,\mathbf{y})\right] = 0 = \left[\hat{\pi}_i(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_j(t,\mathbf{y})\right] \tag{292}$$

VIII. STRUCTURE SYMPLECTIQUE ET DÉFORMATION

A. Déformation de la structure de Poisson

Il est possible de partir d'une structure de Poisson et lui associer, en l'occurence sous des conditions précises, une autre structure de Poisson qu'on appelle déformation formelle du crochet de Moyal défini sur l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique. Soit le crochet suivant

$$\{f,g\}_{\mathtt{t}} = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{t}^k \{f,g\}_k \,, \tag{293}$$

avec

$$\{f,g\}_k = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^k (x) \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad k = 0,1,2,...,n, \tag{294}$$

et où les $x_i = (x_1, ..., x_{2n})$ sont des coordonnées de l'espace des phases. La matrice $\mathbb{J}^0(x)$ est posé naturellement égale à $\begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix}$, avec $\mathbb{O}_n$ et $\mathbb{I}_n$ sont les matrices nulle et unité à n dimensions. Dans le cas $k = 0$ on trouve le crochet de Poisson habituel,

$$\{f,g\}_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right), \tag{295}$$

Pour $k \neq 0$, les autres crochets sont $\{f,g\}_k$ qui par la relation (293), définissent une déformation formelle. Imposons que ce crochet déformé $\{-,-\}_{\mathtt{t}}$ vérifie les propriétés de la bilinéarité et d'anti-symétrie, la règle Leibniz de dérivabilité et l'identité de Jacobi, c'est-à-dire,

$$\{f,g\}_{\mathtt{t}} = -\{g,f\}_{\mathtt{t}} \tag{296}$$

$$\{f,gh\}_{\mathtt{t}} = \{f,g\}_{\mathtt{t}} h + g \{f,h\}_{\mathtt{t}} \,, \tag{297}$$

et

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} = 0, \tag{298}$$

où $\circlearrowleft_{f,g,h}$ est la somme sur les permutations circulaires de f, g et h.

Cherchons les propriétés des matrices $\mathbb{J}_{ij}^l(x)$. La bililéarité et la condition (297) sont assurées naturellement par la linéarité de dérivée

$$\frac{\partial (gh)}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} h + g \frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{299}$$

En utilisant la définition du crochet, on a pour la condition d'antisymétrie (296) la propriété d'antisymétrie de la matrice

$$\mathbb{J}_{ij}^{k}\left(x\right) = -\mathbb{J}_{ji}^{k}\left(x\right), \tag{300}$$

Cherchons alors les conditions sur $\mathbb{J}_{ij}^{k}\left(x\right)$ pour satisfaire l'identité de Jacobi (298). Par un remplacement direct, on a

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\left\{f,\left\{g,h\right\}_{\mathtt{t}}\right\}_{\mathtt{t}} = \circlearrowleft_{f,g,h}\left\{f,\sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{t}^{k}\left\{g,h\right\}_{k}\right\}_{\mathtt{t}} = .$$

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\left(\sum_{l,k=0}^{\infty}\mathtt{t}^{l+k}\sum_{i,j=1}^{2n}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}^{l}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)\frac{\partial h}{\partial x_\nu}\right)\right) \tag{301}$$

Traitons deux cas séparemment; celui de $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}$ indépendant des coordonnées de l'espace des phases et l'autre où ces coordonnées entre en jeu, ie, $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}(x)$.

1) **Si les matrices $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}$ sont indépendantes des coordonnées de l'espace des phases:**

Pour ce cas on a

$$\frac{\partial\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j} = 0 \tag{302}$$

et par un calcul direct on s'assure aisement que la propriété (300) donne directement l'identité de Jacobi (298),

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\left\{f,\left\{g,h\right\}_{\mathtt{t}}\right\}_{\mathtt{t}} = 0 \tag{303}$$

Par conséquent, pour ce cas la déformation de la structure de Poisson initiale donne toujours une structure de Poisson. Nous allons voir par la suite que ce cas est très utilisé en applications physiques sous deux formes fréquentes dites; Espace (de configuration ou d'impulsion) non-commutatif ou espace des phases non-commutatif, où les deux variables de configuration ou d'impulsion sont déformées.

2) **Si les matrices dépendent de la variable de l'espace des phases:**

Dans ce cas, procédant de la même manière que précédemment on a la condition suivante sur les matrices

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\left(\sum_{l,k=0}^{\infty}\mathtt{t}^{l+k}\sum_{i,j=1}^{2n}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\frac{\partial h}{\partial x_\nu}\right)\left(\mathbb{J}_{ij}^{l}\left(x\right)\frac{\partial\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}\right)\right) = 0 \tag{304}$$

Pour $l+k=p$ on a pour chaque ordre p de $\mathtt{t}$

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{i,j=1}^{2n}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\frac{\partial h}{\partial x_\nu}\right)\left(\mathbb{J}_{ij}^{l}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}\right)\right)=0 \tag{305}$$

Ce qui donne pour toutes les f,g,h la condition suivante

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n}\left[\mathbb{J}_{ij}^{p-k}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}+\mathbb{J}_{\nu j}^{p-k}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{i\mu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}+\mathbb{J}_{\mu j}^{p-k}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{\nu i}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}\right]=0 \tag{306}$$

ou autrement

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n}\left[\mathbb{J}_{ij}^{p-k}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}\right]=0. \tag{307}$$

C'est la condition à imposer sur les matrices $\mathbb{J}_{ij}^{l}\left(x\right)$ pour satisfaire la condition de Jacobi et il est facile de voir que la propriété d'antisymétrie (300) permet d'écrire pour chaque k fixé

$$\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n}\left[\mathbb{J}_{ij}^{p-k}\left(x\right)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}\left(x\right)}{\partial x_j}\right]=0 \tag{308}$$

En conclusion, la condition de Jacobi est toujours (307) vérifiée. Par conséquence, la déformation $\{f,g\}_{\mathtt{t}}$ de la structure de Poisson initiale $\{f,g\}_0$, définie ci-dessus, avec les condition d'antisymétrie des matrices $\mathbb{J}_{ij}^{l}\left(x\right)$, définit une structure de Poisson

Dans nos applications Physique nous n'aurons besoin que des déformations de premier ordre ou tout au plus au second ordre puisque les paramétres de déformation sont en général générés par un effet de gravitation de très faible intensité, considéré ici comme faible perturbation des lois de la physique et qu'on définit comme physique avec déformation. Une forme assez générale sera une déformation de premier ordre sous la forme suivante

$$\left\{x^i,x^j\right\}=\theta\Delta_1^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}),\left\{x^i,x^j\right\}=\sigma\Delta_2^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}),\left\{x^i,p^j\right\}=\delta^{ij}+\beta\Delta_3^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{309}$$

où les fonctions $\Delta_{1,2,3}^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ snt antisymétrique en (i,j). Dans ces applications, nous présenterons brièvement les aspects classique et quantique suivant l'approche fonctionnelle qui est liée naturellement et de façon intime à la structure symplectique.

En l'occuence, voyons comment se déforme cette structure de Poisson initiale $\{f,g\}_0$ dans ce cas de faible déformation. Par exemple, supposons que la perturbation est de premier ordre, la condition formelle sur l'identité de Jacobi (307) dicte qu'on doit avoir

$$\begin{aligned}\circlearrowleft_{f,g,h}\{f,\{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} =&\circlearrowleft_{f,g,h}\left[\{f,\{g,h\}_0\}_0+\mathtt{t}\{f,\{g,h\}_0\}_1+\mathtt{t}\{f,\{g,h\}_1\}_0\right.\\ &\left.+\mathtt{t}^2\{f,\{g,h\}_1\}_1\right].\end{aligned} \tag{310}$$

A l'ordre 0, on a la structure de Poisson initiale $\{.,.\}_0$ est par conséquent on a

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f,\{g,h\}_0\}_0 = 0 \tag{311}$$

A l'ordre 1, on doit avoir

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \left(\{f,\{g,h\}_0\}_1 + \{f,\{g,h\}_1\}_0\right) = 0 \tag{312}$$

qui se traduit par

$$\sum_{k=0}^{p=1} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[\mathbb{J}_{ij}^{p-k}(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}(x)}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{313}$$

Sachant que $\mathbb{J}_{ij}^{0}(x)$ est constante, on aura le résultat (308) (pour $p = 1$ et $k = 1$) suivant

$$\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[\mathbb{J}_{ij}^{0}(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\nu}^{1}(x)}{\partial x_j}\right] = 0 \tag{314}$$

A l'ordre 2, nous voulons que

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f,\{g,h\}_1\}_1 = 0 \tag{315}$$

qui est vérifiée automatiquement par la condition du premier ordre (314) sachant que $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{k}(x) = 0$ pour $k > 1$.

B. Quelques applications de la déformation des structures symplectiques en théorie quantique et formalisme de Feynman

1. *Espace des phases Non-Commutatif*

Depuis qu'Heisenberg a introduit l'algèbre non commutative en physique, cette propriété de non-commutativité continue d'envahir la physique théorique et aussi les disciplines des mathématiques de la théorie de la mesure à la géométrie. Il est remarquable que le schéma d'unification de la gravité avec la mécanique quantique renforce ce fait et les arguments en faveur de l'espace-temps non commutatif sont de plus en plus nécessaires pour contrôler les gênants infinis qui surgissent. De plus, le concept de longueur minimale, rencontré dans la théorie des cordes, marque la non-commutativité dans les relations d'incertitude fondamentales. Du point de vue théorique,il est important de tenter de donner un aspect concret à cette non-commutativité spatio-temporelle. Cela permet une manifestation de phénomènes non locaux qui a des effets considérables en physique des hautes énergies et il a été montré que les divergences infrarouge et ultraviolet sont liées. En mécanique quantique, on peut y parvenir en imposant simplement la non-commutativité dans les relations d'incertitude plus générales

$$[x_i, x_j] = i\mathbf{\Theta}_{ij}, \quad [p_i, p_j] = i\mathbf{\Sigma}_{ij}, \quad [x_i, p_j] = i\boldsymbol{\delta}_{ij}, i, j = 1, 2 \tag{316}$$

où $\mathbf{\Theta}$ et $\mathbf{\Sigma}$ sont des matrices antisymétriques avec $\mathbf{\Theta}_{12} = \boldsymbol{\theta}$ et $\mathbf{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\sigma}$. A ces relations de commutation correspondent les crochets de Poisson déformés dans l'espace des phases classique

$$\{x_i, x_j\} = \mathbf{\Theta}_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = \mathbf{\Sigma}_{ij}, \quad \{x_i, p_j\} = \boldsymbol{\delta}_{ij}, i, j = 1, 2 \tag{317}$$

En fait, de ces formules (317) , on peut écrire la forme symplectique suivante

$$\{F(\xi), G(\xi)\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} J_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial G}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{318}$$

où $\xi = (x_1, x_2, p_1, p_2)$ et

$$J(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix}. \tag{319}$$

Si $H(\xi)$ est l'hamiltonien alors les équations d'Hamilton sont données par

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H(\xi)\} = J_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) \nabla_\xi H, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{320}$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \{x_i, H(x,p)\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \mathbf{\Theta}_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H(x,p)\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \mathbf{\Sigma}_{il} \frac{\partial H}{\partial p_l} \end{aligned} \quad i = 1, 2. \tag{321}$$

Leur forme newtonienne pour $H(x,p) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V(x_1, x_2)$ est

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \mathbf{\Sigma}_{il}\dot{x}_l + \mathbf{\Theta}_{il} m \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_l}\right). \tag{322}$$

Notez que ces équations classiques contiennent les corrections dues à la non-commutativité. Ces corrections sont équivalentes à la présence de champ magnétique pour un hamiltonien quadratique en p et x.

L'action classique s'écrit

$$S_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}} = \int dt \left(\xi J^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) \dot{\xi} - H(\xi)\right), \tag{323}$$

où $J^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})$ est l'inverse de la matrice symplectique (non-commutative) (319). Il est remarquable de noter qu'on peut simplifier cette forme symplectique par une transformation canonique linéaire, dite shift de Popp, suivante $\xi = A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})\,\eta$, où $A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})$ satisfait

$$A^T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})\,J^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})\,A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1}(0,0)\,. \tag{324}$$

Cette matrice $A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})$ est donnée par l'expression

$$A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{325}$$

Les crochets (318) retrouvent leur forme canonique,

$$\{\eta_i,\eta_j\} = J_{ij}(0,0), \quad i,j = 1,2,3,4, \tag{326}$$

où $\eta = (q_1,q_2,p_1,p_2)$ et q_1,q_2,p_1,p_2 sont maintenant des coordonnées d'espace des phase commutatif. L'action se transforme en

$$S_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}}(A\eta) = \int dt\,\left(\eta J^{-1}(0,0)\,\dot{\eta} - H(A\eta)\right), \tag{327}$$

où l'on note la présence de la matrice A dans l'hamiltonien qui contient les paramètres de non-commutativité. Cette astuce simple est utilisée dans la quantification par l'intégrale de chemin de Feynman.

Le propagateur dans l'espace des phases (coordonnées mixtes) non commutatif est

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T) = \int DQDP\exp\{i\int[PJ_{\theta\sigma}^{-1}\dot{Q} - H(Q,P)]dt\}, \tag{328}$$

où $Q^T = (x_1,p_2)$, $P^T = (x_2,p_1)$, $(J_{\theta,\sigma})_{ij} = (\begin{matrix} \boldsymbol{\theta} & 1 \\ -1 & -\boldsymbol{\sigma} \end{matrix})$ et $H(Q,P)$ est l'hamiltonien du système.

Sous l'effet de la transformation (324), le propagateur devient

$$K_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}}(Q^i,Q^f,T) = \int DQD\mathcal{P}\exp\{i\int[PJ_{0,0}^{-1}\dot{Q} - H_{\theta\sigma}(Q,\bar{A}P)]dt\}, \tag{329}$$

où

$$J_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}. \tag{330}$$

On note que l'application de cette transformation comme astuce au propagateur initial (328) a déplacé la déformation due à la non-commutativité de la partie cinétique vers la partie dynamique $H_{\boldsymbol{\theta\sigma}}$. Comme $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont de très petits paramètres de déformation, nous pouvons utiliser l'expansion de Taylor pour un hamiltonien général. Pour voir cela, nous développons $\bar{A} = 1 + \beta$, avec $\beta = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, et alors,

$$H_{\boldsymbol{\theta\sigma}}\left(Q, \bar{A}P\right) = H(Q,P) + H_\beta(Q,P), \tag{331}$$

avec $H_\beta(Q,P)$ est maintenant traitée comme une perturbation ajoutée à l'hamiltonien $H(Q,P)$, c'est à dire

$$H_\beta(Q,P) = (\beta P)^T \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P} + \sum_{ij} \frac{1}{2!} (\beta P)_i^T (\beta P)_j \frac{\partial^2 H(Q,P)}{\partial P_i \partial P_j} + ... \tag{332}$$

L'intégrale de chemin de Feynman pour un potentiel général dans l'espace des phases non commutatif est donnée par,

$$K_{\boldsymbol{\theta\sigma}}(Q^i, Q^f, T) = \int DQDP \exp\{i \int dt(PJ^{-1}\dot{Q} - H(Q,P) - H_\beta(Q,P))\}. \tag{333}$$

Il est clair que, pour les hamiltoniens quadratiques en (x_1, x_2, p_1, p_2), cette série de perturbations se coupe à l'ordre deux en β, i.e., les deux premiers termes sont la seule correction apportée par la déformation à la série. Autrement dit, pour un hamiltonien de la forme

$$H(P,Q) = P^T AP + Q^T BQ + Q^T CP + P^T DQ + a^T P + b^T Q + c,$$

avec $A = A^T, B = B^T, C = D^T$, a, b vecteurs réels et c constante réelle, nous avons $H_{\theta\sigma}(Q, \overline{A}P) = H(P,Q) + H_\beta(P,Q)$ comme hamiltonien quandratique,

$$H_\beta(P,Q) = (\beta P)^T \frac{\partial H(P,Q)}{\partial P} + (\beta P)^T \frac{\partial^2 H(P,Q)}{\partial P^2} (\beta P) = (\beta P)^T (2AP + 2DQ + a) + 2 (\beta P)^T A (\beta P).$$

Nous notons que dans le cas général $H_\beta(Q,P)$ est une série infinie qui équivaut au cas d'action non locale. Comme mentionné précédemment, à l'aide de cette transformation canonique linéaire, nous transformons la déformation due à la non commutativité, de la partie cinétique à la partie dynamique en ajoutant $H_\beta(Q,P)$.

2. *Mécanique quantique D-dimensionelle pour le modèle Snyder-de Sitter non-relativiste*

La théorie de la déformation est une méthode algébrique qui, par l'introduction de paramètres, étend les structures algébriques dans d'autres. Par exemple, en physique, on a essayé de quantifier un système classique selon cette méthode pour obtenir son correspondant quantique ou d'introduire ces paramètres de déformation comme coupure pour éliminer les divergences présentes dans la théorie et donc, parfois, c'est comme étendre une symétrie en un autre pour répondre aux exigences des observations. Dans ce dernier contexte, l'algèbre de Snyder-de Sitter est définie comme une extension non linéaire de l'algèbre de Poincaré, connue sous le nom de triple relativité restreinte et représente également une généralisation de la relation d'incertitude de longueur minimale. Au vu de cela, il est important de noter qu'il existe deux autres paramètres fondamentaux de déformation en plus de la vitesse de la lumière; l'énergie de Planck et le rayon Sitter qui est lié à la constante cosmologique. Son algèbre associée est définie par la relation de commutation suivante

$$\begin{gathered}[x_i, p_j] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta p_i p_j + \sqrt{\alpha\beta}\left(p_i x_j + x_j p_i\right)\right), \\ [x_i, x_j] = i\hbar\beta\epsilon_{ijk}L_k \text{ et } [p_i, p_j] = i\hbar\alpha\epsilon_{ijk}L_k,\end{gathered} \tag{334}$$

où L_k sont des composants de l'opérateur moment cinétique et où α et β sont des petits paramètres de déformation deformation. Cette algèbre se caractérise par une modification des relations de commutation canoniques des opérateurs de position et d'impulsion et implique l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans leurs relations d'incertitude. En effet, la relation de commutation de Heisenberg du modèle de Snyder en dimension 1 satisfait la relation suivante,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\left(1 + \alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 + \alpha\beta\left(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\right)\right), \tag{335}$$

Cette relation conduit directement à la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}\frac{\left|1 + \alpha^2\left(\Delta x\right)^2 + \beta^2\left(\Delta p\right)^2\right|}{1 + \hbar\alpha\beta}. \tag{336}$$

Cette relation (336) donne lieu à une longueur minimale non nulle sur la position et l'impulsion

$$\Delta x_{\min} = \frac{\hbar\beta}{\sqrt{1 + 2\hbar\alpha\beta}}, \quad \Delta p_{\min} = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{1 + 2\hbar\alpha\beta}}. \tag{337}$$

Si on se fier à la correspondance canonique classique-quantique

$$\{\widehat{O_1, O_2}\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{O_1}, \widehat{O_2}\right] \tag{338}$$

cette algèbre lui correspond en crochets de Poisson (mécanique classique) les crochets canoniques suivants

$$\begin{gathered}\{x_i, p_j\}_{def} = \left(\delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta p_i p_j + \sqrt{\alpha\beta}\left(p_i x_j + x_j p_i\right)\right), \\ \{x_i, x_j\}_{def} = \beta\epsilon_{ijk}L_k \text{ et } \{p_i, p_j\}_{def} = \alpha\epsilon_{ijk}L_k,\end{gathered} \tag{339}$$

Ces crochets peuvent être simplifiés via la transformation canonique linéaire (quantique et même classique) en dimension D,

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + \tfrac{\beta}{\alpha}\lambda \bar{p}_i, \qquad \hat{p}_i = (1-\lambda)\,\bar{p}_i - \tfrac{\alpha}{\beta}\bar{x}_i, \tag{340}$$

λ un paramètre libre, qui peut être choisi dans chaque cas pour avoir le hamiltonien symétrique. Les nouvelles variables canoniques $(\bar{x}_i, \bar{p}_i)$ vérifient les relations canoniques suivantes

$$\begin{aligned} [\bar{x}_i, \bar{p}_j] &= i\hbar\left(1+\beta^2\bar{p}_i^2\right), \quad [\bar{x}_i, \bar{x}_j] = \beta^2\left(\bar{x}_i\bar{p}_j - \bar{x}_j\bar{p}_i\right), \quad [\bar{p}_i, \bar{p}_j] = 0, \text{ quantique} & (341)\\ \{\bar{x}_i, \bar{p}_j\}_{def} &= \left(1+\beta^2\bar{p}_i^2\right), \quad \{\bar{x}_i, \bar{x}_j\}_{def} = \beta^2\left(\bar{x}_i\bar{p}_j - \bar{x}_j\bar{p}_i\right), \quad \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\}_{def} = 0, \text{ classique} & (342)\end{aligned}$$

Par conséquent, il est possible de réécrire ces opérateurs de coordonnées de position et d'impulsion qui satisfont les crochets de Snyder Heisenberg (341,342) par des variables canonique $\hat{X}$ et $\hat{P}$

$$\hat{x}_i = \sqrt{1-\beta^2\hat{\mathbf{P}}^2}\hat{X}_i + \tfrac{\lambda\beta}{\alpha}\tfrac{\hat{P}_i}{\sqrt{1-\beta^2\hat{\mathbf{P}}_i^2}}, \ \hat{p}_i = -\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-\beta^2\ \hat{\mathbf{P}}^2}\hat{X}_i + (1-\lambda)\tfrac{\hat{P}_i}{\sqrt{1-\beta^2\hat{\mathbf{P}}^2}}. \tag{343}$$

qui obéissant à les relations canoniques habituelles. Dans la version quantique,les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont symétriques seulement sur les sous-espace $L^2(\mathbb{R}^D, d\mathbf{P}/\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}^2})$, oùle produit scalaire est défini par

$$\langle\psi \mid \phi\rangle = \int_{-1/\beta}^{1/\beta}\frac{d\mathbf{P}}{\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}^2}}\psi^*(P)\,\phi(P), \tag{344}$$

and where the wave function satisfying the periodic boundary conditions, $\psi(-1/\beta) = \psi(1/\beta)$, thus this leads to the following closure relation

$$\int_{-1/\beta}^{1/\beta}\tfrac{d\mathbf{P}}{\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}^2}}\left|\mathbf{P}\right\rangle\left\langle\mathbf{P}\right| = 1. \tag{345}$$

et avec les relation de projection suivantes; pour le cas libre

$$\left\langle P|P'\right\rangle = \left(\tfrac{1-\beta^2\mathbf{P}'^2}{1-\beta^2\mathbf{P}^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}^2}\delta\left(\mathbf{P}-\mathbf{P}'\right), \text{and } \gamma = i\,(1-\lambda)\,/2\hbar\alpha\beta, \tag{346}$$

alors que pour l'oscillateur harmonique

$$\left\langle P|P'\right\rangle = \left(\tfrac{1-\beta^2\mathbf{P}'^2}{1-\beta^2\mathbf{P}^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}^2}\delta\left(\mathbf{P}-\mathbf{P}'\right), \text{and } \gamma = i\lambda/2\hbar\alpha\beta. \tag{347}$$

Ces relations permettent la construction du propagateur de Feynman dans ce cas quantique, on formule le propagateur correspondant à l'ancien hamiltonien $\hat{H} = \hat{p}_i^2/2m$, qui s'écrira en fonction des ces variables canoniques $\left(X_i = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial P_i}, P_i\right)$ comme

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\frac{\mathbf{P}^2\left(1-i\hbar\alpha\beta\,(1-D)\right) - i\hbar D\frac{\alpha}{\beta}}{1-\beta^2\mathbf{P}^2} + \left(\alpha^2\hbar^2 - 2i\hbar\frac{\alpha}{\beta}\right)\sum_i P_i\frac{\partial}{\partial P_i} - \hbar^2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1-\beta^2\mathbf{P}^2\right)\sum_i\frac{\partial^2}{\partial P_i^2}\right]. \tag{348}$$

et le propagateur associé à cet hamiltonien

$$K\left(\mathbf{P}_b,t_b,\mathbf{P}_a,t_a\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^{N}\int_{-1/\beta}^{1/\beta}\frac{d\mathbf{P}_j}{\sqrt{1-\beta^2\mathbf{P}_j^2}}$$

$$\times\prod_{j=1}^{N+1}\left[\left(\frac{1-\beta^2\mathbf{P}_{j-1}^2}{1-\beta^2\mathbf{P}_j^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left[\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon\alpha^2/\beta^2}}\right]^D\left[1-\beta^2\mathbf{P}_j^2\right]^{\frac{1-D}{2}}\right]$$

$$\times\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m\beta^2\left(\Delta\mathbf{P}_j\right)^2}{2\alpha^2\varepsilon^2\left(1-\beta^2\mathbf{P}_j^2\right)}+\frac{i\hbar\beta^2}{\varepsilon}\left(\gamma-\frac{3}{2}+i/\alpha\beta\hbar\right)\frac{\mathbf{P}_j\Delta\mathbf{P}_j}{1-\beta^2\mathbf{P}_j^2}\right.\right.$$

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2\beta^2\left(\gamma-\frac{3}{2}+i/\alpha\beta\hbar\right)^2}{2m}\frac{\mathbf{P}_j^2}{\left(1-\beta^2\mathbf{P}_j^2\right)}+\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m\beta^2}\frac{(\gamma-1)\beta^2\left(D+\beta^2\mathbf{P}_j^2(\gamma+(1-D))\right)}{\left(1-\beta^2\mathbf{P}_j^2\right)}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2m}\frac{\mathbf{P}_j^2\left(1-i\hbar\alpha\beta\left(1-D\right)\right)-i\hbar D\frac{\alpha}{\beta}}{1-\beta^2\mathbf{P}_j^2}-\frac{\hbar^2\beta^2\left(\alpha^2-2i\frac{\alpha}{\beta\hbar}\right)(\gamma-1)}{2m}\frac{\mathbf{P}_j^2}{\left(1-\beta^2\mathbf{P}_j^2\right)}\right]\right\} \tag{349}$$

qui lui correspond l'action classique ($\hbar\rightarrow0$), fonctionnelle $\mathbf{P}(t)$,suivante

$$S\left[\mathbf{P}(t)\right]=\int_{t_a}^{t_b}dtL(\mathbf{P},\dot{\mathbf{P}})=\int_{t_a}^{t_b}dt\left(\frac{m\beta^2\left(\dot{\mathbf{P}}\right)^2}{2\alpha^2\left(1-\beta^2\mathbf{P}^2\right)}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}}{\left(1-\beta^2\mathbf{P}^2\right)}\right)$$

Le cas de l'oscillateur harmonique se fait de la même manière.

3. Déformation (GUP) non-relativiste en présence de la masse dépendante de l'énergie

Il est bien connu que la description des systèmes physiques par une algèbre de Heisenberg déformée est étroitement liée à l'existence d'une incertitude minimale de position. Les motivations de son émergence sont dues à plusieurs raisons, par exemple on la retrouve dans la théorie des cordes, la gravité quantique, les théories des champs non commutatifs, la physique des trous noirs, le principe holographique et dans la physique de la production des trous noirs. Cette longueur minimale découle du principe d'incertitude de Heisenberg modifié. Il est appelé principe d'incertitude généralisée (GUP) et donne l'existence de relations de commutation et d'incertitude modifiées. Par exemple, prenons le cas

$$[\hat{x},\hat{p}] \;=\; \imath\hbar\hat{f}_\beta\left(p\right),\qquad \Delta x\Delta p\geqslant\frac{\hbar}{2}\left|\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle\right|,\ \text{quantique} \tag{350}$$

$$\{x,p\}_{def} \;=\; f_\beta\left(p\right),\{x,x\}_{def}=0,\{p,p\}_{def}=0\ \text{classique} \tag{351}$$

où ($\hat{f}_\beta\left(p\right)=1+\beta^\mu\hat{p}f_0'+\frac{1}{2}\beta^{2\mu}\hat{p}^2f_0''+...$) une fonction générale, β paramètre de déformation et μ un nombre fractionnaire avec $\lim_{\beta\rightarrow0}\hat{f}_\beta\left(p\right)=1$. Des exemples intéressant ont été déjà traités comme $\hat{f}_\beta(p) = \left(1+\beta\hat{p}^2\right)$, $\hat{f}_\beta(p) = 1/\left(1-\beta\hat{p}^2\right)$ $\hat{f}_\beta(p) = 1/\left(1-\beta\left|\hat{p}\right|\right)$ et $\hat{f}_\beta(p) = \left(1-\beta\left|\hat{p}\right|\right)^2$ où la longueur minimale est de l'ordre $\hbar\sqrt{\beta}$ tentaient d'éliminer les divergences de la théorie des champs. Cependant, l'un des effets indésirables laissés par ces sujets est "une violation" du principe d'équivalence. Cette violation implique, pour le mouvement des corps classiques (macroscopiques) dans l'espace, que les crochets de Poisson classiques modifiés correspondants devraient contenir cette déformation dans un champ gravitationnel uniforme (351) et ainsi donner l'impression que des objets de masse différente tombent différemment.

Clarifions ce problème par un exemple de calcul, à travers le mouvement d'une particule de masse m dans un champ gravitationnel uniforme $V(x) = -gx$. De l'hamiltonien de la théorie newtonienne

$$H = \frac{p^2}{2m} + mV(x), \tag{352}$$

les équations canoniques correspondantes sont

$$\dot{x} = \{x, H\}_{def} = \frac{p}{m} f_\beta(p), \tag{353}$$

and

$$\dot{p} = \{p, H\}_{def} = mgf_\beta(p), \tag{354}$$

avec $\{.,.\}_{def}$ est le crochet de Poisson déformé déduit de (351). Ainsi, nous pouvons obtenir l'équation du mouvement comme,

$$\ddot{x} = g + 3mg\beta^\mu\vartheta f_0' + 2gm^2\beta^{2\mu}\vartheta^2\left(\left(f_0'\right)^2 + f_0''\right) + \ldots . \tag{355}$$

Ici, ϑest la vitesse des particules dans un champ gravitationnel uniforme dans l'espace ordinaire $(\beta = 0)$. Par conséquent, pour conserver le principe d'équivalence faible, il faut placer une condition sur le paramètre de déformation, qui est sa dépendance aux masses,

$$\left(\beta_a\right)^\mu m_a = Cst. \tag{356}$$

Cela signifie est que β_a est un coefficient de déformation différent pour chaque type de particule de masse (élémentaire).

D'autre part, l'idée fondamentale de la méthode du groupe de renormalisation est que les propriétés d'un système physique changent lorsqu'elles sont vues à différentes échelles de distance, et ces changements dépendent de l'énergie, ce qui devrait jouer un rôle nécessaire si le paramètre de déformation est l'énergie. dépendant. Cette dépendance énergétique conduit à la nécessité que ces paramètres de déformation dépendent de l'énergie à travers l'implication physique résultant du principe d'équivalence ci-dessus Eq. (356). Restreignons nous au cas plus simple où la masse dépendant de l'énergie sans que les paramètres de déformation soient liés à l'énergie.

Dans la représentation de l'espace momentumimpulsion, $\{\hat{x} = \imath\hbar\partial/\partial p,\ \hat{p} = p\}$, l'équation d'onde dépendant du temps avec une masse dépendant de l'énergie est

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(p,t) = \hat{H}(\hat{E})\Psi(p,t), \tag{357}$$

où

$$\hat{H}(\hat{E}) = \left[\frac{1}{2m\left(\imath\hbar\partial/\partial t\right)}\hat{p}^2 + V(\hat{x})\right]. \tag{358}$$

avec $V(\hat{x})$ le potentiel scalaire et $m\left(\imath\hbar\partial/\partial t\right) = m_0/g_\gamma(\imath\hbar\partial/\partial t)$ représente une masse dépendant de l'énergie avec $g_\gamma(\imath\hbar\partial/\partial t)$ désigne une fonction réelle de γ(paramètre). L'équation de continuité pour une particule scalaire non relativiste dans le potentiel $V(\hat{x}) = \varpi\hat{x}^2$, pourrait être déduite de l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p}J = 0, \tag{359}$$

où ρ est la densité de probabilité et J la densité de courant. Dans ce cas de la masse dépendant de l'énergie, on a les expressions .

$$J = \imath\varpi\left[\psi^*(p)\partial_p\psi(p) - \psi(p)\partial_p\psi^*(p)\right]. \tag{360}$$

$$\rho = |\Psi(p,t)|^2 - \frac{1}{\imath\hbar}\int^t ds\ \Psi^*(p,s)\left(\frac{p^2}{2m_0}\left[g_\gamma\left(\imath\hbar\overrightarrow{\partial}_s\right) - g_\gamma\left(-\imath\hbar\overleftarrow{\partial}_s\right)\right]\right)\Psi(p,s). \tag{361}$$

La flèche droite de de dérivation $\overrightarrow{\partial}_t$ indique la dérivation à droite et vice versa pour les opérateurs de dérivation de flèche gauche $\overleftarrow{\partial}_t$. Remarquons qu'on n' pas le cas usuel de $\rho_0 = |\Psi(p,t)|^2$. Donc, après avoir utilisé la base des états énergétiques ($\Psi(p,t) = e^{-\frac{\imath}{\hbar}Et}\psi(p)$), la condition de normalisation est

$$N = \int \psi^*(p)\left[1 - \frac{p^2}{2m^2(E)}\frac{d}{dE}\left(m(E)\right)\right]\psi(p)\,dp. \tag{362}$$

D'autre part, introduisons l'incertitude de Heisenberg généralisée dans les systèmes dépendant de l'énergie où on a la déformation définie par Eq. (). L'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion satisfont les expressions suivantes, et les deux opérateurs agissant sur des fonctions de carré intégrable $\phi(p) \in \mathcal{L}^2(-a, a; dp/f_\beta(p)), (a \leq \infty)$:

$$\hat{x}\phi(p) = \imath\hbar f_\beta(p)\frac{\partial}{\partial p}\phi(p) \quad \text{and} \quad \hat{p}\phi(p) = p\phi(p). \tag{363}$$

avec le produit scalaire suivant la normalisation (362) comme suit :

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = \int_{-a}^{+a} \frac{dp}{f_\beta(p)} \psi^*(p) \left[1 - \frac{p^2}{2m^2(E)} \frac{\partial m(E)}{\partial E} \right] \phi(p), \tag{364}$$

ces fonctions d'onde doivent satisfaire les conditions aux limites périodiques $\psi(-a) = \psi(a)$, où a représente le moment maximal observable et nous obtenons

$$\langle x|p\rangle = \exp\left[-\frac{\iota x}{\hbar} \int^p f_\beta(p') \, dp' \right]. \tag{365}$$

et

$$\int_{-a}^{a} (1/f_\beta(p)) \, |p\rangle \langle p| \, dp = 1, \tag{366}$$

et

$$\langle p'|p\rangle = \exp\left[-\frac{\iota x}{\hbar} \left(\int^p \frac{1}{f_\beta(p)} dp - \int^{p'} \frac{1}{f_\beta(p)} dp \right) \right]. \tag{367}$$

Construison l'intégrale de chemin pour une amplitude de transition non relativiste unidimensionnelle dans la représentation impulsion pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, qui est associée au GUP en présence d'une masse dépendant de l'énergie qui vérifie

$$\left[\hat{H}(\hat{E}) - \hat{E} \right]_b K(p_b, p_a, t_b, t_a) = \iota\hbar\delta(p_b - p_a) \, \delta(t_b - t_a),$$

où $\hat{H}(\hat{E})$ est l'opérateur hamiltonien dépendant de l'énergie standard défini par Eq. (358). la relation de commutation pour les opérateurs de position et d'impulsion est (). Nous obtenons une conservation de l'énergie $E = Cts$ et le propagateur suivant

$$\begin{aligned} K^{(\beta)}(p_b, t_b; p_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\iota}{\hbar}E(t_b - t_a)} \int_0^\infty d\lambda e^{\frac{\iota}{\hbar}E\lambda} \lim_{N\to\infty} \prod_{\jmath=1}^{N} \int \frac{dp_\jmath}{f^{(\beta)}(p_\jmath)} \\ &\times \prod_{\jmath=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\iota\hbar m_0\omega^2\varepsilon}} \exp\left\{ \frac{\iota}{\hbar} \sum_{\jmath=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2\varepsilon m_0\omega^2} \frac{(\Delta p_\jmath)^2}{(f_\jmath^{(\beta)})^2} + \frac{3\iota\hbar}{2} \frac{f_\jmath^{(\beta)\prime} \Delta p_\jmath}{f_\jmath^{(\beta)}} \right.\right. \\ &\left.\left. -\varepsilon \left(\frac{p_\jmath^2}{2m(E)} - \frac{m_0\omega^2\hbar^2}{2} \left(f_\jmath^{(\beta)} f_\jmath^{(\beta)\prime\prime} - \tfrac{5}{4} (f_\jmath^{(\beta)\prime})^2 \right) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{368}$$

qui lui correspond l'action classique ($\hbar \to 0$) suivante

$$S[p(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(p,\dot{p}) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{1}{2m_0\omega^2} \frac{(\dot{p})^2}{(f_\beta(p))^2} - \frac{p^2}{2m(E)} \right) \tag{369}$$

---

[1]